

ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

46. BAND

1961

FÜNFTES HEFT

Inhaltsverzeichnis

Seite

A. KNOBLOCH: Dämpfung des Streufeldes von Spartransformatoren durch unmagnetische Metallhohlzylinder. Mit 16 Textabbildungen	277
J. FISCHER: Laplacesche Transformation, Anfangswerte und unstete Funktionen, physikalische Dimensionen. Mit 4 Textabbildungen	295
W. HERZOG: Die Zurückführung unsymmetrischer Vierpole zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen auf symmetrische Vierpole. Mit 23 Textabbildungen	312
P. BÖNING: Analyse eines klassischen Versuchs. Mit 9 Textabbildungen	321
H. EDELMANN: Die Berechnung von Impedanz-, Admittanz- und gemischten Matrizen für besondere Klemmenpaare eines Netzes. Mit 2 Textabbildungen	325

Das Messen mit elektrischen Geräten

Grundlagen und Anwendungen

Von Dipl.-Ing. HANS NEUMANN,

Oberbaurat, Dozent an der Ingenieurschule der Freien und Hansestadt Hamburg,
Leiter des Elektrischen Prüfamtes 2, Hamburg

Mit 465 Abbildungen. XII, 640 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 55,50

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Das Buch bietet mehr, als sein Titel vermuten läßt. Hier werden nicht einfach Meßgeräte in ihrer Wirkungsweise oder Verfahren beschrieben, sondern der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gesetzt, den Leser überhaupt in das Wesen des „Messens“ als solches einzuführen, ihn mit den Grundbegriffen der „Meßkunst“ vertraut zu machen und ihm ein kritisches Gefühl zu geben für das, was er eigentlich mißt. Die darin behandelten Geräte und Meßbeispiele sind in diesem Sinne nur Mittel zum Zweck. Das Buch ist nicht nur dem Anfänger äußerst nützlich, der die ersten Schritte auf dem weiten Gebiet der Meßtechnik wagen will, sondern auch dem erfahrenen Praktiker, dem es viele wertvolle Hinweise auf Fehlermöglichkeiten, ihr Erkennen und Vermeiden bietet. Von der unendlichen Mühe, die sich der Verfasser mit der Zusammenstellung dieses Werkes gemacht hat, wird aber nur der Leser eine Vorstellung haben, der sich selbst jahrelang mit ähnlichen Arbeiten beschäftigt hat. Das Buch kann jedem Ingenieur und Studierenden nicht nur zum Lesen, sondern vor allem auch zum Beherzigen der darin gebrachten Ratschläge empfohlen werden.“

Archiv für elektrische Übertragung

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Das

Archiv für Elektrotechnik

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für die Zeitschrift „Archiv für Elektrotechnik“ erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Archiv für Elektrotechnik“ erscheinende Arbeiten dürfen vorher nicht an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Fotokopien: Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. (Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an:

Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an:

Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

SPRINGER-VERLAG

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.
Fernschreib-Nr. 01-83319

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901
Fernschreib-Nr. 04-61723

Energiebilanz und Rentabilität von Heizkraftwerken

Von Dr.-Ing. HERBERT BACHL,

Werkdirektor der Stadtwerke-Elektrizitätswerke München

Mit 20 Abbildungen. 78 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 18,—

INHALTSÜBERSICHT

Energietechnik und Heizkraft · Aufgabenstellung, Bezeichnungen und Symbole · Prinzipschaltungen und Energiefluß von Heizkraftwerken · Maßnahmen zur Steigerung der Energieausbeute · Schaltungen und Temperaturverlauf der Heizwärmeübertragung · Energiebilanzen von Heizkraftwerken · Annahmen und Rechnungsgang für Vergleiche verschiedener Auslegungen von Heizkraftwerken · Vergleich von Kraftwerksleistung und Kapitalbedarf bei gleicher Jahresstromabgabe · Vergleich von Kraftwerksleistung und Kapitalbedarf bei gleicher Jahresheizwärmeabgabe · Zusammenfassung · Literatur- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Dämpfung des Streufeldes von Spartransformatoren durch unmagnetische Metallhohlzylinder*

Von

ALBERT KNOBLOCH, Karlsruhe

Mit 16 Textabbildungen

(Eingegangen am 27. April 1961)

Übersicht: Der bei einlagig bewickelten Spartransformatoren auftretende beträchtliche Streufluß wird durch unter oder über die Wicklung geschobene unmagnetische Metallhohlzylinder bis auf einen geringen Rest abgedämpft. Damit kann der resultierende Lastspannungsabfall bei Spartransformatoren über etwa 5 kVA erheblich verringert werden. Die Theorie liefert in einheitlicher Darstellung magnetisches Feld, elektrische Strömung, zusätzliche Kupferverluste und verbleibende Streublindleistung für die bekannten Anordnungen des geschlitzten und des gewickelten Dämpfungszylinders. Im meßtechnischen Teil wird an einem Beispiel befriedigende Übereinstimmung mit der Rechnung nachgewiesen. Das angewandte Meßverfahren erfaßt niederohmig abgegriffene Wechselspannungen bis herab zu $10^{-5} V_{eff}$ nach Betrag und Phasenlage.

Übersicht der benutzten Formelzeichen

a_1, a_2, a_3, a_4	Abmessungen im Fenster
a	Fensterbreite
a_n^+	korrigierte Fensterbreite zur angenäherten Berücksichtigung der Eisenunsymmetrie
$a_k f_{Cu} = a'_k$	metallische Wicklungshöhe bezogen auf die Breite b
A	elektrischer Strombelag
b'	Fensterhöhe
b	Wicklungsbreite, -länge
B	Kerninduktion (Scheitelwert)
d	metallische Gesamtdicke des Zylinders
δ	Einzelblechstärke beim gewickelten Zylinder
δ_{III}	Abstand Wicklung-Zylinder
δ_V	Abstand Zylinder-Eisen
e	Basis der natürlichen Logarithmen
f_n, f_n^+	Korrekturfunktionen
s_x, s_y	elektrische Stromdichte in der x - bzw. y -Richtung (Effektivwert)
$\underline{s}_x, \underline{s}_y$	komplexe Schreibweise
S	FOURIERKoeffizient der Stromdichtezerlegung
h_y, h_z	magnetische Feldstärke in y - bzw. z -Richtung (Effektivwert)
H	FOURIERKoeffizient der Feldstärkezerlegung
j	imaginäre Einheit
κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit
k	Korrekturfaktor für die Streublindleistung
λ	Ordnungszahl für die Windungen beim gewickelten Zylinder
m, n	Ordnungszahlen der FOURIERentwicklungen
N	Windungszahl des gewickelten Zylinders
P_σ	Streublindleistung
ϱ	spezifischer elektrischer Widerstand
σ	Korrekturfaktor
φ	elektrische Phasenwinkel
\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis
U'_m, U''_m	mittlerer Umfang der Wicklung bzw. des Zylinders
V_{Cu}	Kupferverluste
W	Rückwirkungsfaktor
ω	Kreisfrequenz

* Die Arbeit ist die gekürzte Fassung der 1960 an der Technischen Hochschule Karlsruhe eingereichten und genehmigten Dissertation: „Beitrag zur Theorie der Dämpfungszylinder“.

Theoretischer Teil

1. Beschreibung des Streufeldes im Wicklungsfenster des einlagig bewickelten Spartransformators mit Dämpfungszylinder

1.1 Modell und Voraussetzungen der Rechnung

Als Grundlage für die folgenden Überlegungen dient ein einschlenklig einlagig bewickelter Kernspartransformator, wie er im meßtechnischen Teil verwendet ist (Bild 1). Dieses Modell muß zur sinnvollen Begrenzung des mathematischen Aufwandes stufenweise idealisiert werden. Zunächst wird völlige Eisensymmetrie bezüglich des bewickelten Schenkels angenommen, ein Ansatz, der sich praktisch bei allen Rechnungen, die das Streufeld in Transformatoren betreffen, eingeführt und bewährt hat. Von hier aus würde eine Rechnung in Zylinderkoordinaten beginnen. Der zweite Vorgang der Idealisierung wickelt das zylindrische Modell längs des mittleren Umfanges des Wicklungsfensters ab und liefert ein quaderförmiges Modell vom Querschnitt des Bildes 2, welches in kartesischen Koordinaten beschrieben werden kann. Auf beiden Stufen der Idealisierung

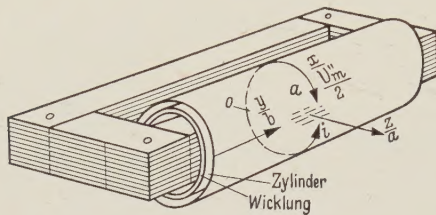


Bild 1. Modell des Spartransformators mit Dämpfungszylinder.

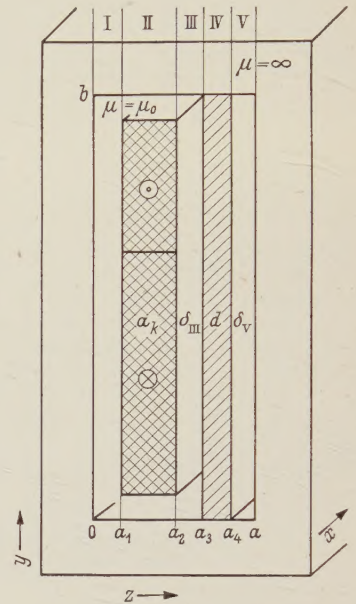


Bild 2. Schnitt durch das idealisierte Modell.

stellen sich Wicklungs- und Fensterquerschnitte als Rechtecke mit jeweils zueinander parallelen Begrenzungslinien dar. Die physikalischen Voraussetzungen werden zweckmäßig wie folgt gewählt:

1. Es werden quasistationäre Vorgänge betrachtet.
2. Die Eisenpermeabilität ist sehr viel größer als die des Luftraumes im Wicklungsfenster.
3. Im Eisenkern können keine Wirbelströme fließen.
4. Das Leitermaterial von Wicklung und Dämpfungszylinder ist nicht ferromagnetisch.
5. Wicklung und Zylinder besitzen jeweils für sich an jeder Stelle dieselbe Temperatur.

Damit ist folgende Anschauung von der Wirkungsweise der Streufeldabdämpfung gegeben: Zunächst erzeugt das von der stromdurchflossenen Sparwicklung erregte, den Dämpfungszylinder im wesentlichen transversal durchsetzende magnetische Wechselfeld im Zylinder eine elektrische Wirbelströmung, deren eigene magnetische Feldrückwirkung das ursprüngliche Streufeld der Wicklung bis auf einen gewissen resultierenden Rest abschwächt, der gerade noch ausreicht, die Wirbelströmung aufrecht zu erhalten. Entsprechend dieser Verminderung des magnetischen Streufeldes sinkt die Streureaktanz der Sparwicklung sehr stark ab. Der Wirkspannungsabfall steigt gleichzeitig wegen der zusätzlichen Kupferverluste im Dämpfungszylinder, jedoch ist dieser Einfluß bei Spartransformatoren über etwa 5 kVA wesentlich geringer, so daß auch die gesamte Kurzschlußimpedanz stark zurück geht.

Hiernach hat die nachfolgende Rechnung das Ziel, die noch unbekannte Wirbelströmung im Zylinder, das resultierende magnetische Feld sowie die restliche Streublindleistung und die zusätzlichen Kupferverluste zu ermitteln.

1.2. Berechnungsmethoden

In den erwähnten Koordinatensystemen, die sich auf Grund der Form des Modells anbieten, sind verschiedene Rechnungsarten möglich, die sich für die Behandlung von Wirbelstromproblemen herausgebildet haben. Grundlage sind die MAXWELLSchen Feldgleichungen in der Form für quasistationäre Vorgänge:

$$\operatorname{rot} \underline{h} = \underline{s}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \underline{s} = -j \omega k \mu \underline{h}, \quad (2)$$

sowie die Zusatzbedingungen:

$$\operatorname{div} \underline{h} = 0; \quad \operatorname{div} \underline{s} = 0. \quad (3), (4)$$

1. Die erste Methode unterteilt den zu untersuchenden Feldraum in Gebiete, innerhalb derer die Feldgleichungen kontinuierlich gelten und demnach auch durch einheitliche Lösungen befriedigt werden können (Bild 2). Dabei verursacht der gegenseitige Anschluß der Teilgebiete durch Randbedingungen einen beträchtlichen Rechenaufwand.

2. Iterative oder gegebenenfalls Näherungslösungen gewinnt man nach HERTZ, indem man die magnetische Feldrückwirkung der Wirbelströme zunächst vernachlässigt und erst anschließend durch Überlagerung von Teillösungen berücksichtigt.

3. Wenn sich aus der geometrischen Anordnung der Modells ergibt, daß vorwiegend nur eine räumliche Komponente des magnetischen Feldes zu erwarten ist, so läßt sich der betrachtete Feldraum als ganzes kontinuierlich behandeln, wenn man nach RÜDENBERG die darin liegenden Wicklungen durch eine Umrechnung über die Erstreckung des Feldraumes in Feldrichtung ausbreitet. Die hieraus gewonnenen Näherungslösungen lassen sich aus den exakten Lösungen nach der ersten Methode bestätigen, wenn dort die Erstreckung des Modells in der Richtung der angenommenen einzigen Feldkomponente sehr klein wird.

Bei der Behandlung von Wirbelstromproblemen erhält man stets partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, für welche die Stellung des Randwertproblems korrekt ist. Wenn also Lösungen aufgefunden werden, welche die Randbedingungen erfüllen und außerdem gegenüber kleinen Änderungen dieser Randbedingungen stabil sind, so sind diese Lösungen zur Beschreibung physikalischer Erscheinungen anwendbar. Vielfach lassen sich durch Produktansätze Lösungsscharen in Reihendarstellung gewinnen, die jedoch schon bei zweidimensionalen Aufgaben bei der Auswertung großen Aufwand verursachen, wie man den klassischen Arbeiten über Stromverdrängung entnimmt.

Ausgehend von dieser Tatsache und der praktischen Erfahrung, daß sich Streuungsprobleme meist mit guter Annäherung im kubischen Modell behandeln lassen, wird in der Folge nur mit kartesischen Koordinaten gerechnet. Bei weiterer Beschränkung auf ebene Felder tritt bei den getroffenen Voraussetzungen immer wieder die Forderung auf, mit festliegenden Randbedingungen die Gleichung

$$\Delta X - k^2 X = 0 \quad (5)$$

für einen gegebenen Rechteckbereich zu lösen. Man erhält Reihen von der Form

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \sin m y + B_m \cos m y) (C_m + D_m \cdot e^{k_m z} + E_m \cdot e^{-k_m z}), \quad (6)$$

für jeden Teilbereich des betrachteten Gebietes. Dabei muß die Periode der Zerlegung längs y beim Übergang von einem Teilbereich zum andern längs z dieselbe bleiben. Sind die Verhältnisse z. B. hinsichtlich der Stromdichteverteilung im Wicklungsfenster bekannt, kann nach BOYAIJAN auch eine Darstellung in der Form von Doppelreihen

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_m \sin m y + B_m \cos m y) (C_n \sin n z + D_n \cos n z) \quad (7)$$

erfolgen, die dann den ganzen interessierenden Feldraum mit allen Teilbereichen kontinuierlich erfassen. Diese Form bietet Vorteile bei der Ermittlung der magnetischen Energie des

Feldes, da die Aufteilung in Bereiche entfällt. Sie ist nicht geeignet zur Berechnung noch unbekannter Wirbelströmungen.

Die HERTZsche Iteration wird hier nicht angewendet.

Die oben erwähnte Methode nach RÜDENBERG für Fälle, in denen nur eine Komponente des magnetischen Feldes auftritt, läßt sich auf Wicklungen mit Wirbelstromerscheinungen anwenden, wenn die Stromverdrängung in Richtung des magnetischen Feldes vernachlässigbar klein ist, d. h. wenn die metallische Dicke der betrachteten Wicklung kleiner ist als etwa die halbe Eindringtiefe der elektrischen Strömung bei der betreffenden Frequenz.

Bezieht man nun die vorstehenden allgemeinen Überlegungen auf das Modell des Wicklungsfensters gemäß Bild 2 und sieht man von der Abhängigkeit längs x ab, so erhält man zur Beschreibung des magnetischen Feldes in allen fünf Zonen die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} - \frac{\partial s_x}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} + \frac{\partial s_x}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

sowie die Zusatzbeziehung für die Wirbelströmung im Dämpfungszylinder:

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial z^2} - j \omega \kappa \mu_0 s_x = 0. \quad (10)$$

Bekannte Ausgangsgröße ist die gegebene Stromdichteverteilung der Sparwicklung. Sie wird längs y in eine trigonometrische Reihe zerlegt, wobei die Periode der Zerlegung durch die Höhe des Wicklungsfensters bestimmt ist. Aus Gründen der Rechnungsvereinfachung wird angenommen, daß der Dämpfungszylinder die Höhe des Wicklungsfensters habe. Längs der Fensterkontur muß die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes verschwinden.

Die vereinfachte Rechnung mit nur einer Feldkomponente führt zu folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} - \left(\frac{a'_k}{a} s'_x + \frac{d}{a} s''_x \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 s''_x}{\partial y^2} - j \omega \kappa \mu_0 \left(\frac{a'_k}{a} s'_x + \frac{d}{a} s''_x \right) = 0, \quad (12)$$

wobei anstelle der vorher für jede Zone getrennt zu berechnenden Stromdichte s_x jetzt die Summe der nach RÜDENBERG umgerechneten Stromdichten in Wicklung (s'_x) und Dämpfungszylinder (s''_x) steht. Wünscht man zwei räumliche Komponenten der elektrischen Strömung zu berücksichtigen, so folgen die Gleichungen:

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} - \left(\frac{a'_k}{a} s'_x + \frac{d}{a} s''_x \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{d}{a} s''_y = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 s''_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s''_x}{\partial y^2} - j \omega \kappa \mu_0 \left(\frac{a'_k}{a} s'_x + \frac{d}{a} s''_x \right) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 s''_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s''_y}{\partial y^2} - j \omega \kappa \mu_0 \frac{d}{a} s''_y = 0. \quad (16)$$

Diese Beziehungen bilden die Voraussetzung zur Berechnung der Feld- und Strömungsverhältnisse beim geschlitzten und gewickelten Dämpfungszylinder, bei denen ja eine Abhängigkeit in x -Richtung besteht. Bekannt ist hier ebenfalls die Stromdichteverteilung s'_x der Wicklung. Sie wird längs y in eine trigonometrische Reihe zerlegt, wobei die Periode der Zerlegung jetzt durch die Länge des Dämpfungszylinders bestimmt wird. Gegebenenfalls über den Dämpfungszylinder überstehende Teile der Wicklung beeinflussen wegen der Voraussetzung eines eindimensionalen magnetischen Feldes die Wirbelströmung im Zylinder nicht. Das magnetische Feld im Wicklungsfenster kann mit den hiernach bekannten Stromdichteverteilungen unter Berücksichtigung ihrer Lage im Fenster für einen Querschnitt an

der Stelle x des Modells durch eine trigonometrische Doppelreihe gemäß Gl. (7) dargestellt werden. Hat der Dämpfungszylinder die Länge des Fensters, so wird die Rechnung besonders einfach. Mit den Bezeichnungen nach Bild 2 und den Stromdichteverteilungen:

$$s'_x = \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \cos \beta y, \quad (17)$$

$$\underline{s}''_x = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{S}''_{xn} \cos \beta y, \quad (18)$$

sowie den Beziehungen (8) und (9) erhält man

$$\underline{h}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{zmn} \cos \alpha z \cdot \sin \beta y, \quad (19)$$

$$\underline{h}_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{ymn} \sin \alpha z \cos \beta y, \quad (20)$$

wobei folgende Definitionen gelten:

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_{z0n} &= \frac{a_2 - a_1}{a \beta} S'_{xn} + \frac{a_4 - a_3}{a \beta} \underline{S}''_{xn}, \\ \underline{H}_{zmn} &= \frac{2 \beta}{a \cdot \alpha} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\Delta'_m S'_{xn} + \Delta''_m \underline{S}''_{xn}), \\ \underline{H}_{ymn} &= -\frac{\alpha}{\beta} \underline{H}_{zmn} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

mit

$$\Delta'_m = \sin \alpha a_2 - \sin \alpha a_1, \quad \Delta''_m = \sin \alpha a_4 - \sin \alpha a_3, \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{m \pi}{a}, \quad \beta = \frac{n \pi}{b}. \quad (23)$$

2. Die Strömung in einem idealen (geschlossenen) Dämpfungszylinder

Das magnetische Streufeld eines Transformators bildet sich im Kurzschluß praktisch in derselben Weise aus wie im Betrieb. Es ist deshalb zunächst gleichgültig, daß bei Verwendung eines geschlossenen Dämpfungszylinders kein praktischer Betrieb durchgeführt werden kann, da der Zylinder für den Transformatorhauptfluß eine Kurzschlußwindung darstellt. Dieser ideale Zylinder ist ein Grenzfall, der auch von den ausführbaren Formen mehr oder minder angenähert wird.

2.1 Berechnung unter Voraussetzung zweier Komponenten des magnetischen Feldes

Die Ermittlung der Feld- und Strömungsverhältnisse erfolgt mit der Zoneneinteilung des Bildes 2 und den Differentialgleichungen (8) bis (10). Mit den bereits erwähnten Voraussetzungen und Randbedingungen ergibt sich folgende Zusammenstellung für die Komponenten des magnetischen Feldes und der Stromdichte im Zylinder:

Zone I:

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}_{zI} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{In} \cosh \beta z \sin \beta y, \\ \underline{h}_{yI} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{In} \sinh \beta z \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Zone II:

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}_{zII} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underline{H}_{II n} \cosh \beta (z + \underline{D}) + \frac{S'_{zn}}{\beta} \right] \sin \beta y, \\ \underline{h}_{yII} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{II n} \sinh \beta (z + \underline{D}) \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Zone III:

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}_{z\text{III}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{III}n} (e^{\beta z} + \underline{F} e^{-\beta z}) \sin \beta y, \\ \underline{h}_{y\text{III}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{III}n} (e^{\beta z} - \underline{F} e^{-\beta z}) \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Zone IV:

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}_{z\text{IV}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{IV}n} (e^{\beta' z} + \underline{A} e^{-\beta' z}) \sin \beta y, \\ \underline{h}_{y\text{IV}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{IV}n} \frac{\beta'}{\beta} (e^{\beta' z} - \underline{A} e^{-\beta' z}) \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Zone V:

$$\left. \begin{aligned} \underline{h}_{z\text{V}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{V}n} \cosh \beta (z - a) \sin \beta y, \\ \underline{h}_{y\text{V}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{\text{V}n} \sinh \beta (z - a) \cos \beta y, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_{\text{I}n} &= \frac{S'_{xn}}{\beta} \frac{\cosh \beta (a_2 - a_1) - \underline{f} \sinh \beta (a_2 - a_1) - 1}{\cosh \beta a_2 - \underline{f} \sinh \beta a_2}, \\ \underline{H}_{\text{II}n} &= \frac{S'_{xn}}{\beta} \frac{\sqrt{(f^2 - 1) \sinh^2 \beta a_1 - 2 \sinh \beta a_1 (\underline{f} \cosh \beta a_2 - \sinh \beta a_2) + 1}}{\cosh \beta a_2 - \underline{f} \sinh \beta a_2}, \\ \underline{H}_{\text{III}n} &= \frac{S'_{xn}}{\beta} \frac{\sinh \beta a_1 - \sinh \beta a_2}{1 - \underline{F}}, \\ \underline{H}_{\text{IV}n} &= \frac{S'_{xn}}{\underline{\beta}'} \frac{(\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1)}{1 - \underline{F}} e^{(\beta - \beta') a_3}, \\ \underline{H}_{\text{V}n} &= \frac{S'_{xn}}{\underline{\beta}'} \frac{(\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1)}{1 - \underline{F}} \frac{2 e^{\beta' a_4}}{\cosh \beta \delta_V - \frac{\beta}{\underline{\beta}'} \sinh \beta \delta_V} e^{(\beta - \beta') a_3}, \\ \underline{f} &= \frac{e^{\beta a_3} + \underline{F} e^{-\beta a_3}}{e^{\beta a_3} - \underline{F} e^{-\beta a_3}}, \\ \underline{F} &= e^{2(\beta - \beta') a_3} \cdot \underline{A}, \\ \underline{A} &= e^{2\beta' a_4} \cdot \frac{\beta' \cosh \beta \delta_V + \beta \sinh \beta \delta_V}{\underline{\beta}' \cosh \beta \delta_V - \beta \sinh \beta \delta_V}, \\ \sinh \beta \underline{D} &= \frac{\sinh \beta a_1 \cdot S'_{xn}}{\beta \underline{H}_{\text{II}n}}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{f} &= \frac{e^{\beta a_3} + \underline{F} e^{-\beta a_3}}{e^{\beta a_3} - \underline{F} e^{-\beta a_3}}, \\ \underline{F} &= e^{2(\beta - \beta') a_3} \cdot \underline{A}, \\ \underline{A} &= e^{2\beta' a_4} \cdot \frac{\beta' \cosh \beta \delta_V + \beta \sinh \beta \delta_V}{\underline{\beta}' \cosh \beta \delta_V - \beta \sinh \beta \delta_V}, \\ \sinh \beta \underline{D} &= \frac{\sinh \beta a_1 \cdot S'_{xn}}{\beta \underline{H}_{\text{II}n}}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Für die Stromdichteverteilung im Dämpfungszylinder ergibt sich:

$$\underline{s}_x'' = \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \left[\frac{\beta}{\underline{\beta}'} \sinh \beta' (a_4 - z) \tanh \beta \delta_V + \cosh \beta' (a_4 - z) \right] \cos \beta y, \quad (31)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} S'_{xn} &= -S'_{xn} j \xi_n \frac{\frac{\beta'}{\beta} (\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1)}{X}, \\ X &= \frac{\beta'}{\beta} \cosh \beta a_3 \sinh \beta' d \left(\frac{\beta'}{\beta} + \tanh \beta \delta_V \coth \beta' d \right) \\ &\quad + \sinh \beta a_3 \cosh \beta' d \left(\frac{\beta'}{\beta} + \tanh \beta \delta_V \tanh \beta' d \right). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Es sind noch die folgenden Erklärungen erforderlich:

$$\xi_n = \frac{\omega \kappa \mu_0}{\beta^2} \quad \text{mit } \beta \text{ aus Gl. (23)}, \quad (33)$$

$$\beta' = \sqrt{1 + j \xi_n \beta}. \quad (34)$$

Ist die Stromverdrängung im Dämpfungszylinder vernachlässigbar, so erhält man:

$$\underline{s}_x'' = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{s}_{x_n}'' \cos \beta y. \quad (35)$$

Eine Auswertung der Beziehung für einen relativ dünnen Zylinder und ein großes Fensterverhältnis b/a von etwa 7 zeigt, daß die Stromdichte s_x'' nur sehr schwach variiert, wenn sich die Abstände a_1 und δ_V bei kleinem δ_{III} verändern. Dagegen hat ein großer Abstand δ_{III} ein merkliches Absinken der Zylinderstromdichte und damit der Dämpfungswirkung zur Folge. In den Gl. (24) bis (34) sind zwei Spezialfälle enthalten, die im folgenden dargelegt werden.

2.2 Spezialisierung bei fehlender Dämpfung

Man erhält für $d = 0$, $\delta_V = 0$ die Feldgleichungen für die rechteckig begrenzte Wicklung beliebiger Lage im Fenster und beliebiger Stromverteilung längs y .

Zone I

$$\left. \begin{aligned} h_{xI} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} C_I \cosh \beta z \sin \beta y, \\ h_{yI} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} C_I \sinh \beta z \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Zone II

$$\left. \begin{aligned} h_{xII} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} [1 + \sinh \beta a_1 \sinh \beta z - C_{II} \cosh \beta z] \sin \beta y, \\ h_{yII} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} [\sinh \beta a_1 \cosh \beta z - C_{II} \sinh \beta z] \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Zone III

$$\left. \begin{aligned} h_{xIII} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} C_{III} \cosh \beta (a - z) \sin \beta y, \\ h_{yIII} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} C_{III} \sinh \beta (a - z) \cos \beta y, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C_I &= \frac{\sinh \beta (a - a_1) - \sinh \beta (a - a_2)}{\sinh \beta a}, \\ C_{II} &= \frac{\sinh \beta a_1 \cosh \beta a + \sinh \beta (a - a_2)}{\sinh \beta a}, \\ C_{III} &= \frac{\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1}{\sinh \beta a}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Für einseitig offenes Fenster, d. h. $\delta_{III} \rightarrow \infty$ erhält man:

Zone I

$$\left. \begin{aligned} h_{xI} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (e^{-\beta a_1} - e^{-\beta a_2}) \cosh \beta z \sin \beta y, \\ h_{yI} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (e^{-\beta a_1} - e^{-\beta a_2}) \sinh \beta z \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Zone II

$$\left. \begin{aligned} h_{z\text{ II}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (1 - e^{-\beta z} \sinh \beta a_1 - e^{-\beta a_2} \cosh \beta z) \sin \beta y, \\ h_{y\text{ II}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (e^{-\beta z} \sinh \beta a_1 - e^{-\beta a_2} \sinh \beta z) \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Zone III

$$\left. \begin{aligned} h_{z\text{ III}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1) e^{-\beta z} \sin \beta y, \\ h_{y\text{ III}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_{xn}}{\beta} (\sinh \beta a_2 - \sinh \beta a_1) e^{-\beta z} \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Ist die Wicklung sehr dünn und liegt sie außerdem nahe am Kern, so daß sie als Strombelag am Fensterrand aufgefaßt werden kann, so bleibt nur Zone III übrig, und man erhält mit

$$A'_{xn} = S'_{xn} (a_2 - a_1),$$

für das geschlossene Wicklungsfenster:

Zone III

$$\left. \begin{aligned} h_{z\text{ III}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} A'_{xn} \frac{\cosh \beta (a - z)}{\sinh \beta a} \sin \beta y, \\ h_{y\text{ III}} &= \sum_{n=1}^{\infty} A'_{xn} \frac{\sinh \beta (a - z)}{\sinh \beta a} \cos \beta y, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

während für das einseitig offene Fenster entsteht:

Zone III

$$\left. \begin{aligned} h_{z\text{ III}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} A'_{xn} e^{-\beta z} \sin \beta y, \\ h_{y\text{ III}} &= \sum_{n=1}^{\infty} A'_{xn} e^{-\beta z} \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

2.3 Spezialisierung für eine Feldkomponente

Wie schon früher angedeutet, kann aus der genauen Verteilung der Zylinderstromdichte, gemäß Gl. (31) die angenäherte bei Annahme nur einer x -Komponente gewonnen werden, wenn das Fensterverhältnis b/a sehr groß wird. Die Hyperbelkosinus werden dann näherungsweise $= 1$, die Hyperbelsinus nehmen den Wert ihres Argumentes an, und schließlich folgt:

$$\underline{s}_x'' = - \frac{a_2 - a_1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \cos \beta y, \quad (45)$$

mit

$$\underline{W}_n = \frac{j \xi_n \frac{d}{a}}{1 + j \xi_n \frac{d}{a}}, \quad (46)$$

wobei ξ_n in Gl. (33) definiert ist.

Damit ist eine übersichtliche Form gefunden, die übrigens mit der Identität

$$a_2 - a_1 = a_k t_{Cu} = a'_k, \quad (47)$$

aus der vereinfachten Rechnung mit den Ausgangsgleichungen (11) und (12) sehr viel rascher gewonnen werden kann. Damit ist der Anschluß der bezüglich des Feldes eindimensionalen Methode an die genauere zweidimensionale vollständig, und unter der Voraussetzung langer schmaler Wicklungsfenster, die bei Spartransformatoren praktisch immer zutrifft, kann vereinfacht weiter gerechnet werden.

Die Definition des Rückwirkungs-faktors W_{r} nach entsprechenden Darlegungen von KADEN erweist sich als nützlich bei der Deutung der noch abzuleitenden Beziehungen. Aus Gl. (45) mit Gl. (17) läßt sich ersehen, daß die elektrische Strömung im Zylinder nach Maßgabe des Rückwirkungs-faktors sich der räumlichen Strömungsverteilung in der Wicklung anpaßt, und zwar so, daß Wicklungs- und Zylinderstrombelag etwa gleich groß werden. W_{r} beschreibt außer dem Betragsverhältnis eine Phasendrehung der einzelnen räumlichen Stromdichtewellen, die umso größer wird, je kleiner die Frequenz und je größer die Ordnungszahl der betreffenden Welle ist.

3. Der mehrschichtige (gewickelte) Dämpfungszylinder

3.1 Elektrische Strömung und magnetisches Feld

Betriebsmäßig verwendbar wird der Dämpfungszylinder, wenn er für den Hauptfluß keine Kurzschlußwindung darstellt, also aus isoliertem Blech gewickelt oder massiv und längs einer Mantellinie geschlitzt ist. Im folgenden wird der gewickelte Zylinder mit N ganzen Windungen behandelt. Seinen Querschnitt stellt Bild 3 dar. Da bei der Rechnung nur eine, im Bild 3 radiale Komponente des magnetischen Feldes berücksichtigt wird, kann zwischen den Wirkungen z. B. des innen- und des außenliegenden Wickelendes nicht unterschieden werden, so daß das Bild in zwei elektrisch und magnetisch gleichwertige Hälften zerfällt. Vor Anwendung der Gl. (13) bis (16) muß noch festgestellt werden, daß das resultierende eindimensionale Feld gemäß Gl. (3) alle Windungen des Zylinders in gleicher Stärke durchsetzt und daher mit den Wirbelströmungen in allen Einzelblechen gleichermaßen verkettet ist. Es erweist sich als praktisch, die Strömungsverteilung in den Windungen jeweils aus der für alle gleichen Strömung des idealen (geschlossenen) Zylinders gemäß Gl. (45) und einer für jede Schicht anderen Zusatzströmung (mit dem Index λ) zusammenzusetzen. Damit erhält man die Ausgangsbeziehungen:

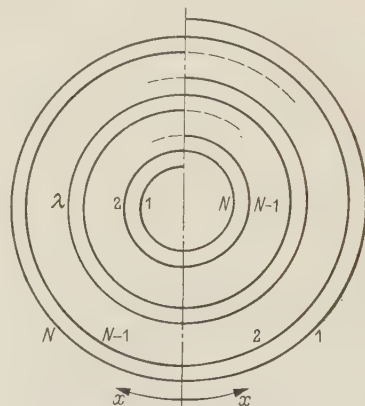


Bild 3. Schnitt durch den gewickelten Dämpfungszylinder.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\underline{s}_x'' + \sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_x^+ \lambda \right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_x^+ \lambda \right)}{\partial x^2} - j \omega \kappa \mu_0 \left(\frac{a_k'}{a} \underline{s}_x' + \frac{d}{a} \underline{s}_x'' + \frac{\delta}{a} \sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_x^+ \lambda \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \left(\sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_y^+ \lambda \right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_y^+ \lambda \right)}{\partial x^2} - j \omega \kappa \mu_0 \frac{\delta}{a} \sum_{\lambda=1}^N \underline{s}_y^+ \lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

mit d als metallische Gesamtdicke des Wickels sowie $\delta = d/N$ als Einzelblechstärke. Die beiden Gleichungen zerfallen entsprechend den Ordnungszahlen der vorhandenen Windungen (z. B. linke Hälfte in Bild 3) in $2N + 1$ Teilgleichungen, von denen eine durch \underline{s}_x'' befriedigt wird, also eine Identität darstellt. Es bleiben die Beziehungen für die Komponenten der Zusatzströmung übrig, zu deren Lösung die Randbedingungen beim Übergang von Halbwindung zu Halbwindung gemäß Bild 3 berücksichtigt werden müssen. Nach Überlagerung mit der idealen Strömung \underline{s}_x'' erhält man für die elektrischen Stromdichtekomponenten in

der Windung λ (Bild 3, linke Hälfte) die folgenden Ausdrücke. Bei beliebiger Windungszahl N gilt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_{x\lambda}'' &= -\frac{a'_k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \left\{ 1 - \frac{\cosh \underline{\beta}^+ \left[x + (N+1-2\lambda) \frac{U''_m}{2} \right]}{\cosh N \underline{\beta}^+ \frac{U''_m}{2}} \right\} \cos \beta y, \\ \underline{s}_{y\lambda}'' &= -\frac{a'_k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \frac{\underline{\beta}^+ \sinh \underline{\beta}^+ \left[x + (N+1-2\lambda) \frac{U''_m}{2} \right]}{\cosh N \underline{\beta}^+ \frac{U''_m}{2}} \sin \beta y, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

mit

$$\underline{\beta}^+ = \sqrt{1 + j \frac{1}{N} \xi_n \frac{d}{a}} \cdot \beta. \quad (50)$$

Den Differentialgleichungen (48) liegt die Vorstellung zugrunde, daß für das resultierende magnetische Feld seitens des Zylinders der Mittelwert der Stromdichteverteilungen in den Einzelwindungen, gebildet über die Zylinderdicke, bestimmend ist. Die Komponenten dieser mittleren Strömung gewinnt man aus den Gleichungen (49) zu:

$$\left. \begin{aligned} \underline{s}_{xm}'' &= -\frac{a'_k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \{ 1 - \underline{F}_n(N) \cosh \underline{\beta}^+ x \} \cos \beta y, \\ \underline{s}_{ym}'' &= -\frac{a'_k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \frac{\underline{\beta}^+}{\beta} \underline{F}_n(N) \sinh \underline{\beta}^+ x \sin \beta y, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

mit

$$\underline{F}_n(N) = \frac{\tanh N \underline{\beta}^+ \frac{U''_m}{2}}{N \cdot \sinh \underline{\beta}^+ \frac{U''_m}{2}}. \quad (52)$$

Das resultierende magnetische Feld wird beschrieben durch:

$$\underline{h}_z = \sum_{n=1}^{\infty} H_{zn} [(1 - \underline{W}_n) + \underline{W}_n \underline{F}_n(N) \cosh \underline{\beta}^+ x] \sin \beta y, \quad (53)$$

mit

$$H_{zn} = \frac{a'_k}{a} \beta S'_{zn}. \quad (54)$$

Aus einem Vergleich der Beziehung (51) mit Gl. (45) für den idealen geschlossenen Zylinder wird ersichtlich, daß wegen der zur Umlenkung der Strömung an den Wickelenden notwendigen Komponente \underline{s}_y'' beim gewickelten Zylinder die Umfangsströmung etwas kleiner ist; allerdings nimmt der Einfluß mit steigender Windungszahl N rasch ab. Entsprechend ist auch das verbleibende resultierende Streufeld etwas größer als beim idealen Zylinder.

Je größer die Windungszahl N bei konstanter Gesamtdicke des Zylinders wird, desto mehr nähert er sich dem idealen geschlossenen Zylinder.

3.2 Spezialisierung für $N = \infty$ (geschlossener Zylinder)

Für $N = \infty$ wird $\underline{F}_n(\infty) = 0$, so daß aus den Gln. (51) bis (53) folgt:

$$\underline{s}_x'' = -\frac{a'_k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} S'_{xn} \underline{W}_n \cos \beta y. \quad (55)$$

Dies ist genau Gl. (45), die auch aus den Beziehungen (11) und (12) direkt gewonnen werden kann.

3.3 Spezialisierung für $N = 1$ (geschlitzter Zylinder)

Die Formeln für einen längs einer Mantellinie geschlitzten Zylinder (Schlitzbreite verschwindend klein) folgen aus der Festsetzung $N = 1$. Man erhält die Gln. (51) bis (53) mit der Bedingung

$$\underline{F}_n(1) = \frac{1}{\cosh \beta^+ \frac{U_m''}{2}}. \quad (56)$$

Wie man leicht zeigt, ist beim geschlitzten Zylinder der Einfluß des Umlenkens der elektrischen Strömung an den Schlitzkanten bedeutend. Am Schlitz tritt das ursprüngliche Radialfeld der Wicklung ungedämpft durch.

Mit den Gln. (51) bis (54) sind die magnetischen Feldverhältnisse sowie die elektrischen Wirbelströmungen für die bekannten zylindrischen Anordnungen zur Streufeldabdämpfung einheitlich erfaßt.

4. Zusätzliche Kupferverluste und restliche Streublindleistung

Die Kupferverluste im allgemeinen (gewickelten) Dämpfungszyylinder ergeben sich zu

$$V_{Cu}'' = 2 \varrho \delta \sum_{\lambda=1}^N \int_0^b \int_0^{\frac{U_m''}{2}} (|\underline{s}_{x\lambda}''|^2 + |\underline{s}_{y\lambda}''|^2) dx dy, \quad (57)$$

mit den Gln. (49) und (50), während die restliche Streublindleistung durch

$$P_\sigma = 2 k \omega \mu_0 a \int_0^b \int_0^{\frac{U_m''}{2}} |\underline{h}_z|^2 dz dy \quad (58)$$

gegeben ist, woraus nach Ausführung der Integrationen eine Darstellung der Form

$$P_\sigma = k \omega \mu_0 a b \frac{U_m''}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_{zn}^2 |(1 - \underline{W}_n)|^2 \left[1 + \frac{2}{\beta \frac{U_m''}{2}} f_n \right] \sigma_n \quad (59)$$

entsteht. Die Funktion f_n verschwindet beim geschlossenen Zylinder, für den gewickelten mit mehr als 10 Windungen ist sie vernachlässigbar klein. Beim geschlitzten Zylinder wird $\frac{2}{\beta \frac{U_m''}{2}} \cdot f_n$ erheblich größer als 1 und unterstreicht damit die mangelhafte Dämpfungswirkung dieser Zylinderform. σ_n ist ein Korrekturfaktor zur Berücksichtigung der räumlichen Lage von Wicklung und Zylinder entsprechend den Überlegungen des Abschn. 1.2, Gln. (17) bis (23). Man erhält

$$\sigma_n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a'_k} \right)^2 \frac{2 |\Delta_{mn}^+|^2}{(\alpha a)^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right]}, \quad (60)$$

mit

$$\Delta_{mn}^+ = \Delta'_m + j \xi_n \frac{d}{a} \left(\Delta'_m - \frac{a'_k}{a} \Delta_m'' \right).$$

Die restliche Streublindleistung beträgt für $d \approx a'_k$ meist noch einige Prozent ihres ursprünglichen Wertes.

Die zusätzlichen Kupferverluste im Zylinder erscheinen nach Auswertung von Gl. (57) in der Form

$$V_{Cu}'' = \varrho \frac{a_k'^2}{d} b \frac{U_m''}{2} \sum_{n=1}^{\infty} S_{xn}^{\prime 2} |\underline{W}_n|^2 \left[1 + \frac{2}{\beta \frac{U_m''}{2}} f_n^+ \right], \quad (61)$$

wobei f_n^+ für den geschlossenen Zylinder wiederum verschwindet. Für den geschlitzten Zylinder zeigt sich dagegen ein beträchtlicher Anstieg der Verluste. Im Fall des gewickelten Zylinders mit $N \geq 5$ bei $\frac{U_m''}{b} \geq 1$ gilt mit guter Annäherung:

$$f_n^+ \approx \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\frac{\beta^+}{\beta} \right).$$

Im allgemeinen ergeben sich danach bei $d \approx a_k'$ zusätzliche Kupferverluste etwa in der Höhe der Wicklungsverluste.

Die Ergebnisse der theoretischen Überlegungen wurden an einem praktischen Beispiel nachgeprüft.

Meßtechnischer Teil

5. Das Meßverfahren

Abgesehen von der Messung der aufgenommenen Kurzschlußwirk- und Blindleistung, die eine summarische Kontrolle der Gln. (57) bis (61) ermöglicht, interessiert bei den vorliegenden Problemen die Überprüfung der berechneten räumlichen Verteilungen von elektrischer Stromdichte und magnetischem Feld. Diese Untersuchung wurde jeweils im Kurzschluß an einem Modell gemäß Bild 1 durchgeführt, wozu die Schaltung nach Bild 4 entwickelt wurde.

Das Modell M wird über einen Schiebetransformator ST von einem Drehstromnetz einphasig gespeist. Eine Sonde mit 10 mm Spitzenabstand gestattet die der Stromdichteverteilung an der Zylinderoberfläche entsprechende Spannungsverteilung zu messen. Dabei entspricht einer Stromdichte von 10 A/cm^2 ein Spannungsgefälle von ca. $20 \mu\text{V/cm}$ (für Kupfer). Um solche niedrige Wechselspannungen mit ausreichender Genauigkeit einer Betrags- und Phasenmessung zugänglich zu machen, ist dem Niederfrequenz-Röhrenvoltmeter RV ein zweifach magnetisch abgeschirmter Transformator MT vorgeschaltet. Sein Mumetallkern

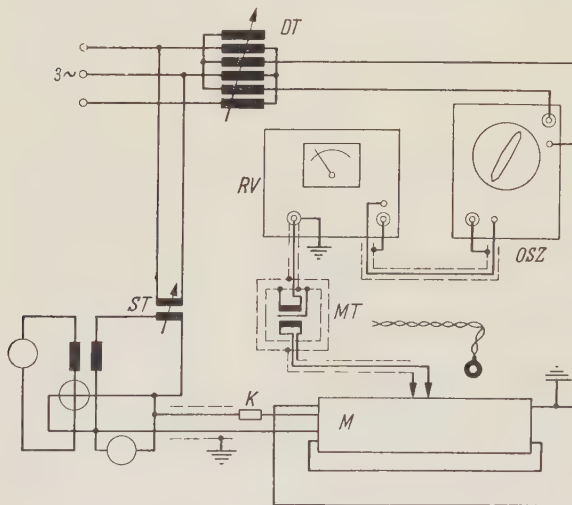


Bild 4. Verwendete Meßschaltung.

der zu messenden Strömungsverteilung durch die Messung selbst vermieden wird. Das Röhrenvoltmeter liefert die Betragsanzeige und gleichzeitig an seinem Verstärkerausgang die Horizontalablenkspannung zur Phasenmessung am Oszillographen OSZ . Der Phasenabgleich erfolgt mit Hilfe eines winkelgeeichten Drehtransformators DT , welcher vom selben Netz gespeist wird wie das Modell. Seine Sekundärspannung liegt als Vertikalablenkspannung ebenfalls am Oszillographen. Der Shunt K liefert jeweils die Bezugsphasenlage des Primärstromes, so daß Phasenverschiebungen im Meßsystem ausgeschaltet werden. Das gezeigte optische Phasenmeßverfahren ist auf etwa 2° el. genau, jedoch im Gegensatz zu Kompen-

satoren und Meßverfahren mit mechanischem Gleichrichter (Vektormesser) für sehr kleine Wechselspannungen sowie in einem weiten Frequenzbereich anwendbar. Bei sorgfältiger Abschirmung ist der Nullpunktsfehler der Betragsanzeige am Röhrenvoltmeter im empfindlichsten Meßbereich $\leq 0,2 \mu\text{V}$, so daß bis herab zu $10 \mu\text{V}$ ausreichend genau gemessen werden kann. Entsprechendes gilt für die Messung des magnetischen Feldes mit Hilfe einer kleinen Spulensonde, die bei ca. $5 \text{ mm } \varnothing$ und 10 Windungen 50 Hz -Felder bis herab zu etwa 2 A/cm zu erfassen gestattet.

6. Ergebnisse der Messung und Vergleich mit Rechenwerten

Das den Messungen zugrunde liegende Modell nach Bild 1 wird in Bild 5 hinsichtlich der Abmessungen ohne Dämpfungszylinder näher erläutert.

$$a = 40 \text{ mm}; \quad b = 313 \text{ mm}; \quad D_a = 86 \text{ mm}; \quad b' = 350 \text{ mm}; \quad a'_k = 1,772 \text{ mm}.$$

Der Eisenkern besitzt quadratischen Querschnitt mit der Kantenlänge 54 mm.

Die Sparwicklung ist in vier Teilspulen unterteilt, so daß die Übersetzungsverhältnisse $1/2$ und $1/4$ bzw. $3/4$ eingestellt werden können. Alle Messungen werden im Kurzschluß der Sparwicklung bei Speisung von der Sekundärseite ausgeführt. Zur Erreichung etwa gleicher Temperatur der Zylinder (40°C) in allen Versuchen beträgt der eingespeiste Kurzschlußstrom bei $\ddot{u} = 1/2$ 10 A, bei $\ddot{u} = 1/4$; $3/4$ 11,8 A. Wandstärken d , spezifische Leitfähigkeit κ bei 40°C sowie Länge und Innendurchmesser der hauptsächlich untersuchten Dämpfungszylinder verzeichnet die nachstehende Tabelle:

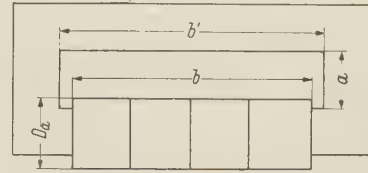


Bild 5. Abmessungen des untersuchten Modells.

Zylinder	d [mm]	κ 40° [$10^4 \cdot 1/\Omega \text{ cm}$]	l [mm]	D_i [mm]
geschlossen	2,566	41,2	312,6	95
geschlitzt	2,566	41,2	312,6	95
gewickelt	$9 \times 0,316 = 2,842$	47,2	313,6	93

Die Leitfähigkeit der Wicklung beträgt bei 40°C $54,1 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega \text{ cm}}$; die Schlitzbreite beim geschlitzten Zylinder ist 1 mm.

Bild 6 ist für $\ddot{u} = 1/2$ Ausgangspunkt der folgenden Darlegung. Der Verlauf des ungedämpften Radialfeldes entspricht der erwarteten Dreiecksform. Sein Höchstwert ist mit 116 A/cm kleiner als der Rechenwert 130 A/cm. Direkt an der Wicklungsoberfläche im Fenster findet man praktisch Übereinstimmung. Die Axialkomponente beträgt etwa 10% der maximalen Radialfeldstärke. Durch die verschiedenen Längen von Wicklung und Fenster werden nur geringe Randstörungen verursacht. Die Wicklung ist nicht ganz symmetrisch aufgebaut; ihre Mittelanzapfung ist etwas über die Mitte hinaus verschoben. Diese Unsymmetrie bildet sich auch bei den im folgenden gezeigten Strömungsverteilungen in den Zylindern ab.

Aus den im theoretischen Teil angestellten Überlegungen folgt, daß der geschlossene Dämpfungszylinder als Grenzfall sich besonders dazu eignet, die verschiedenen Einflüsse von Abmessung und Materialwerten sowie elektrischen Daten auf die Streufeldabdämpfung zu untersuchen. Man darf nach dem dort Gesagten erwarten, daß sich Störeinflüsse bei den anderen Zylindertypen nahezu gleich auswirken wie beim geschlossenen Zylinder. In den Bildern 6 und 7 wird der Einfluß der Speisefrequenz gezeigt. Das bei der Abdämpfung verbleibende Radialfeld ist sehr stark von der Speisefrequenz abhängig. Bei dem untersuchten Modell ist es bei 250 Hz bereits vernachlässigbar klein. Die 50-Hz-Messung zeigt, daß bei Abdämpfung der prozentuale Anteil des entstehenden Axialfeldes zunimmt, so daß es zur Berechnung der Streublindleistung mit Hilfe von Gl. (60) berücksichtigt werden muß. Im Verlauf des Radialfeldes macht sich die oben erwähnte Randstörung stärker bemerkbar. Da die Abweichungen aber bei kleinen Absolutwerten der Feldstärke auftreten, können sie die Gesamtfunktion nur wenig verändern. Ganz ebenso, wie es Gl. (45) mit Gl. (46) erwarten läßt, bildet sich die Zylinderströmung um so genauer nach dem Verlauf der Strömung in der Sparwicklung aus, je höher die Speisefrequenz ist. Besonders deutlich wird dies auch hinsichtlich der Phasenlage anhand des Polardiagramms Bild 8.

Der Aufbau des Modells in Bild 1 stimmt mit den Voraussetzungen der Rechnung nur im Bereich des Fensters überein. Demgemäß ist die Umfangsströmung im Zylinder außen merk-

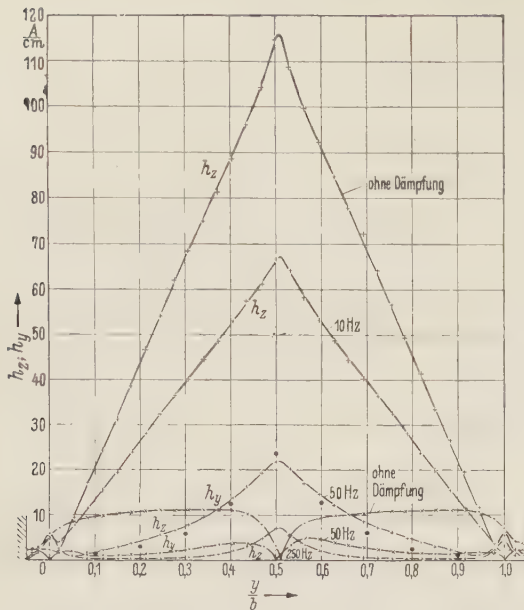


Bild 6. Spartransformator ohne und mit geschlossenem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\hat{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 10, 50, 250$ Hz. Radiale und axiale Feldstärke im Fenster gemessen längs der Peripherie des Dämpfungszylinders (+, × gemessen).

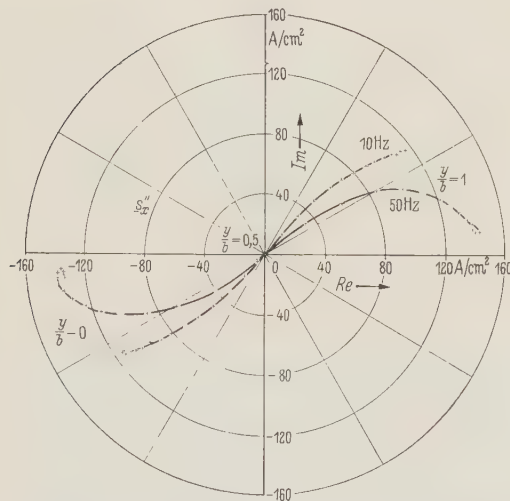


Bild 8. Spartransformator mit geschlossenem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\hat{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 10, 50$ Hz. Ortskurven der Umfangsstromdichte im Fenster längs des Zylinders.

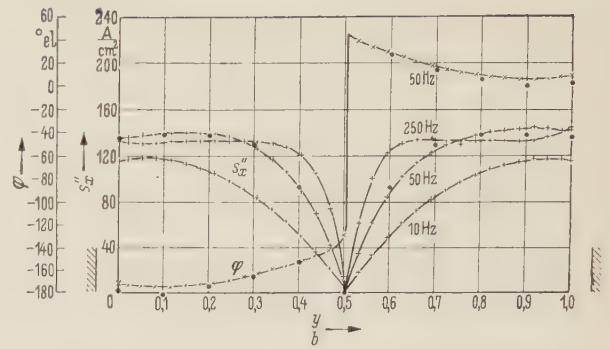


Bild 7. Spartransformator mit geschlossenem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\hat{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 10, 50, 250$ Hz. Umfangsstromdichte längs des Zylinders, gemessen im Fenster (+, × gemessen, • gerechnet).

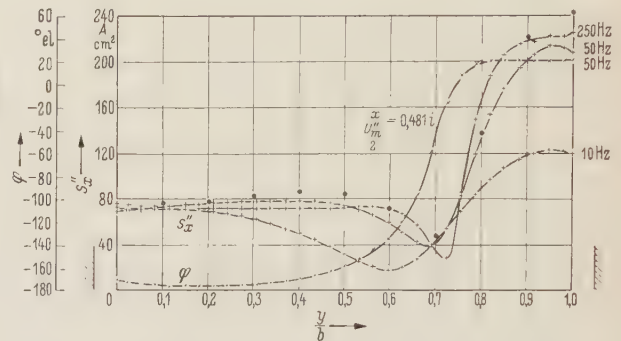


Bild 9. Spartransformator mit geschlossenem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\hat{u} = 1/4; 3/4$; $J = 11,8$ A; $f = 10, 50, 250$ Hz. Umfangsstromdichte und Phasenwinkel längs des Zylinders (+, × gemessen, • gerechnet).

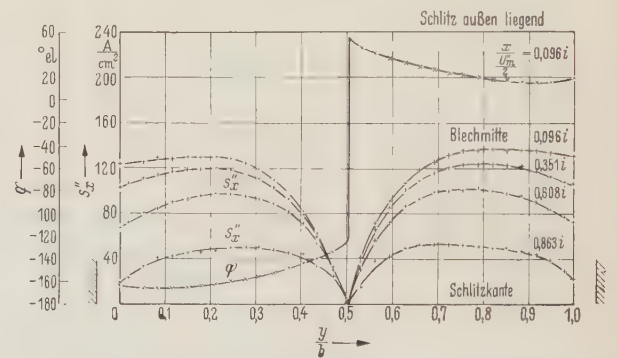


Bild 10. Spartransformator mit geschlitztem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\hat{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 50$ Hz. Umfangsstromdichte längs des Zylinders an vier Stellen des Umfangs und Phasenwinkel (+, × gemessen).

lich kleiner als im Fenster, und zwar um so deutlicher, je kleiner die Speisefrequenz wird. Es muß also eine zwischen innen und außen vermittelnde Umlenkströmung fließen, die diesen Unterschied ausgleicht. Sie läßt sich tatsächlich nachweisen und ist bei geschlitztem und gewickeltem Zylinder in ähnlicher Weise vorhanden. Dort bewirkt sie eine Deformation des von der Rechnung geforderten räumlichen Verlaufes der Umlenkströmung s_y . Entsprechende Überlegungen ergeben sich bei der Darstellung für $\hat{u} = 1/4; 3/4$ in Bild 9 mit dem einen Unterschied, daß der Betragswert der Zylinderumfangsstromdichte auf der ganzen Länge

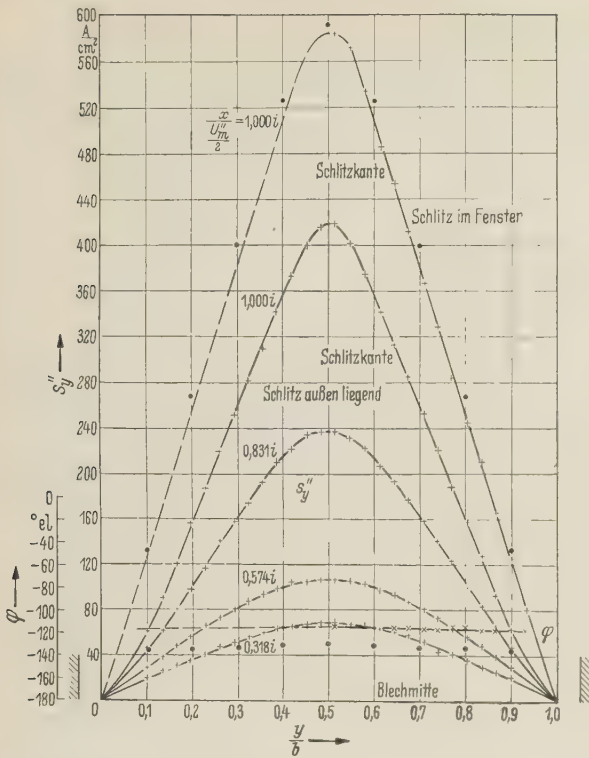


Bild 11. Spartransformator mit geschlitztem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\bar{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 50$ Hz. Umlenkströmung längs des Zylinders an vier Stellen des halben Umfangs; Schlitz außen liegend. Maximale Umlenkströmung und Phasenwinkel für Schlitz im Fenster (+, X gemessen, • gerechnet).

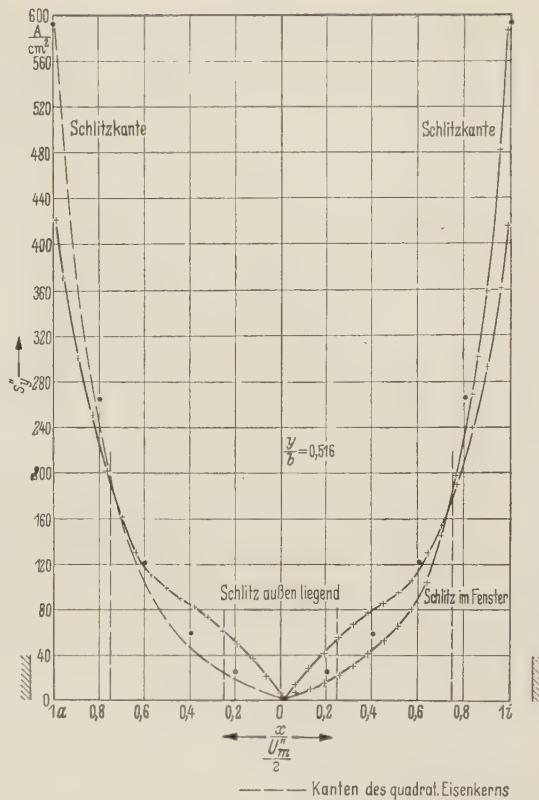


Bild 12. Spartransformator mit geschlitztem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\bar{u} = 1/2$; $J = 10$ A; $f = 50$ Hz. Umlenkströmung längs des Umfangs (+ gemessen; • gerechnet).

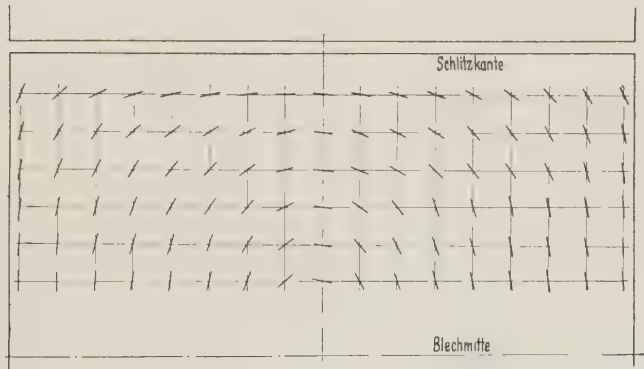


Bild 13. Spartransformator mit geschlitztem Dämpfungszylinder. $d \approx 2,5$ mm; $\bar{u} = 1/2$; $f = 50$ Hz. Richtungsfeld der elektrischen Strömung im Zylinder.

endlich bleibt. In einer Bild 8 entsprechenden Polardarstellung verlaufen die Kurven nicht mehr durch den Koordinaten-Anfangspunkt.

Beim geschlitzten Zylinder ist die Umfangsströmung gemäß Bild 10 von der Lage am Umfang abhängig. In Übereinstimmung mit Gl. (51) und (56) ist sie in der Mitte des abgewickelten geschlitzten Zylinders nahezu so groß wie beim geschlossenen Zylinder, wie ein Vergleich mit Bild 7 zeigt. Dieser ihr Maximalwert hängt auch wenig davon ab, ob der Schlitz sich im Fenster oder in der dazu entgegengesetzten Lage befindet. Dagegen ändert sich die

maximale Umlenkströmung dabei sehr stark. Die Bilder 11 und 12 zeigen den Verlauf der Umlenkströmung für außenliegenden Schlitz und zum Vergleich den ihres Maximalwertes für die Anordnung mit Schlitz im Fenster. Im letzteren Fall wird die höhere magnetische

Leitfähigkeit des Fensterraumes wirksam, wie sie auch für die radialsymmetrische Rechnung angesetzt wurde. Bemerkenswert ist die Größe der Umlenkströmung im Vergleich zur maximalen Umfangsstromdichte. Sie übertrifft diese um etwa das 4,5fache. Daß eine von der Eisenunsymmetrie herrührende Umlenkströmung auch beim geschlitzten Zylinder zusätzlich vorhanden ist, zeigt deutlich Bild 12. Bild 13 vermittelt eine qualitative Vorstellung vom Verlauf der Strömung in einer abgewickelten Hälfte des Zylinders.

Der untersuchte Wickelzylinder hat eine um etwa 10% größere Gesamtwandstärke als der geschlossene Zylinder. Dementsprechend ist die Umfangsströmung etwas kleiner. Die maximale Umlenkströmung (Bild 14 und 15) ist gegenüber derjenigen beim geschlitzten Zylinder fast auf ein Drittel zurückgegangen. Sie klingt praktisch im Verlauf der ersten Windung ab, wobei sich durch die Eisenunsymmetrie wieder merkliche Abweichungen vom erwarteten Verlauf gemäß Gl. (51) insbesondere im Bereich des Fensters ergeben. Die eingezeichneten Rechenwerte sind gewonnen unter Verwendung einer korrigierten Fensterbreite, die durch Anwendung von Gl. (44) auf drei Viertel des Umfanges des Modells zu

$$a_n^+ = \frac{4}{1 + 3\beta a} a$$

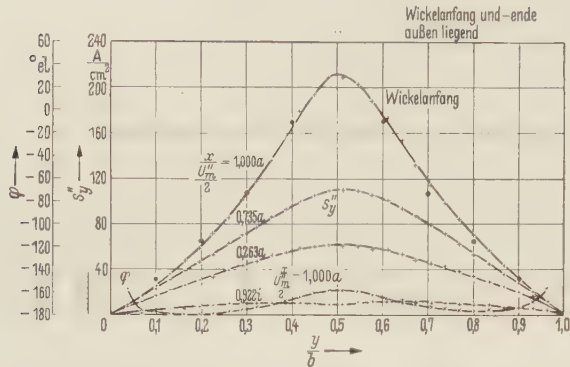


Bild 14. Spartransformator mit gewickeltem Dämpfungszylinder. $d \approx 9 \times 0,3 \text{ mm}$; $\bar{u} = 1/2$; $J = 10 \text{ A}$; $f = 50 \text{ Hz}$. Umlenkströmung längs des Zylinders an vier Stellen des Umfangs, gemessen auf der äußersten Windung (+, \times gemessen; \bullet gerechnet).

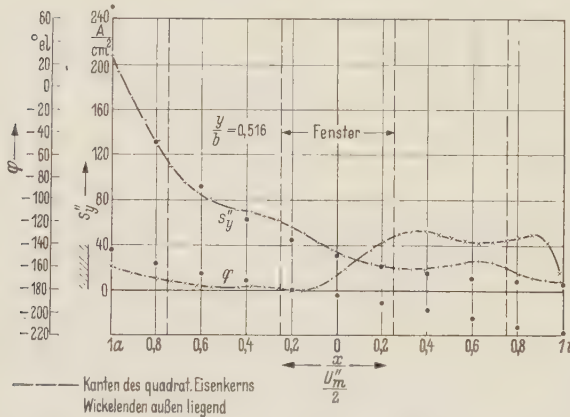


Bild 15. Spartransformator mit gewickeltem Dämpfungszylinder. $d \approx 9 \times 0,3 \text{ mm}$; $\bar{u} = 1/2$; $J = 10 \text{ A}$; $f = 50 \text{ Hz}$. Umlenkströmung längs eines Umfangs, gemessen auf der äußersten Windung (+, \times gemessen; \bullet gerechnet).

gewonnen wird. Sie gestattet, die Eisenunsymmetrie angenähert zu berücksichtigen. Die Messung der maximalen Umlenkströmung am inneren Wickelende mit Hilfe einer angelöteten Drahtsonde ergab, daß die Umlenkströmung dort nur unbedeutend größer war als an der entsprechenden Stelle außen. Damit war experimentell gezeigt, daß inneres und äußeres Wickelende den gleichen elektrischen und magnetischen Bedingungen unterliegen, wie es im theoretischen Teil angenommen wurde.

Die nachstehende Tabelle verzeichnet für 50 Hz die wichtigsten Leistungsdaten:

Anordnung	$V_{Cu}[W]$		$P_o[VA]$	
	gemessen	gerechnet	gemessen	gerechnet
ungedämpft	11,75	9,60	50,5	86,4
geschlossener Zylinder $d \approx 2,5 \text{ mm}$	19,1	18,33	3,76	1,59
geschlitzter Zylinder Schlitz außen	23,0	33,2	14,0	18,47
Schlitz innen	26,7		19,0	
gewickelter Zylinder $d \approx 9 \cdot 0,3 \text{ mm}$	18,4	17,15	3,51	1,99

(Rechenwerte ohne Berücksichtigung der Eisenunsymmetrie für $k = 1$).

Es zeigt sich, daß trotz der Eisenunsymmetrie die bei Abdämpfung fast ausschließlich maßgebenden Kupferverluste abgesehen vom geschlitzten Zylinder durch die Theorie mit ausreichender Genauigkeit geliefert werden; dagegen sind die Meßwerte für die Streublindleistung etwa doppelt so groß wie die Rechenwerte. Der Unterschied ergibt sich aus der erwähnten Eisenunsymmetrie; in einem diesbezüglichen Versuch wurde mit Hilfe einer aus Transformatorblech-Streifen gefertigten Jalousie, die um Wicklung und Zylinder im Abstand der äußeren Fensterkontur gelegt wurde, eine gewisse Annäherung an das symmetrische Modell angestrebt. Dabei sanken die Meßwerte für die Streublindleistung merklich ab, während die Kupferverluste praktisch konstant blieben. Im Fall des geschlitzten Zylinders erhält man für Lage des Schlitzes im Fenster gute Übereinstimmung der Meß- und Rechenwerte für die Streublindleistung. Man muß dieses Ergebnis erwarten, denn beim geschlitzten Zylinder wird der größte Anteil der Streublindleistung im Bereich der Schlitzkanten entwickelt, und für diesen Teil des Zylinders sind die Annahmen der Rechnung bei der angegebenen Lage des Schlitzes ja gut erfüllt.

Die Tabelle bestätigt die gemachte Aussage für den geschlossenen und gewickelten Zylinder, daß die Streublindleistung bei wirtschaftlicher Dimensionierung der Dämpfungsmittel auf wenige Prozent zurückgeht, während die Kupferverluste auf etwa das Doppelte ansteigen.

Im beschriebenen Beispiel kann der gewickelte Dämpfungszylinder ab etwa 10 Windungen hinsichtlich der zusätzlichen Kupferverluste wie ein geschlossener Zylinder berechnet werden, wie aus Bild 16 in logarithmischer Darstellung ersichtlich wird. Die Abbildung verzeichnet für Zylinder verschiedener Windungszahl von der Gesamtdicke des gemessenen mit 9 Windungen Streublindleistung und Zylinder-Kupferverluste. Die Darstellung gilt für 50 Hz. Danach nähern sich die Verluste im Zylinder relativ rascher dem Wert beim geschlossenen Zylinder als die Streublindleistung, wenn die Zahl der Windungen bei gleichbleibender Gesamtdicke gesteigert wird. Der Einfluß der Windungszahl ist schwächer als $1/N^2$.

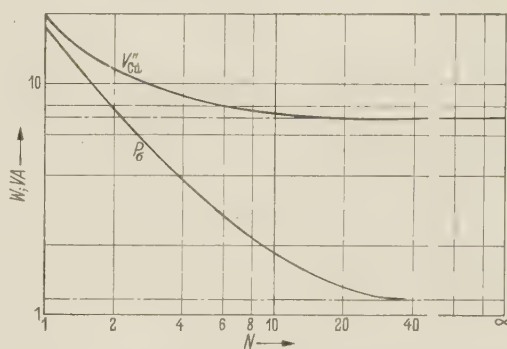


Bild 16. Abhängigkeit der zusätzlichen Kupferverluste und der Streublindleistung von der Windungszahl bei konstanter Kupferdicke des gewickelten Dämpfungszylinders (berechnet).

Zusammenfassung

In theoretischen und meßtechnischen Untersuchungen wird die Wirkungsweise von Dämpfungszylindern zur kontinuierlichen Streufeldabdämpfung beim voll verstellbaren Spartransformator ermittelt. Das Problem ist von Bedeutung für Spartransformatoren kleiner bis mittlerer Leistung (ab ca. 5 kVA), bei denen die spezielle Forderung guter Spannungssteifigkeit bei verschiedenen möglichen Anzapfungen vorliegt. Beispiele sind Spartransformatoren für Laboratoriumszwecke, für kleinere Gleichstromantriebe mit Siliziumgleichrichtern und als Möglichkeit die Anwendung für Lokomotivtransformatoren.

Man erhält für den einlagig gewickelten Spartransformator eine Streufeldabdämpfung bis auf wenige Prozent verglichen mit dem ungedämpften Fall, während bei wirtschaftlicher Bemessung die Kupferverluste etwa auf das Doppelte steigen. Jedoch fällt der letztere Umstand namentlich bei mittelgroßen Einheiten nicht ins Gewicht. Im Falle des untersuchten Modells ergibt sich trotz der noch kleinen Fensterlänge von 35 cm eine Reduktion der maximalen, auf die Eingangsspannung bezogenen Kurzschlußspannung von 4% auf 1,5%. Der Platzbedarf im Transformatorfenster wird nur unwesentlich erhöht, da ein isolierter gewickelter Dämpfungszylinder direkt als Tragkörper für die Sparwicklung dienen kann. Eine Anwendung für Mittelfrequenztransformatoren ist möglich, wenn die Einzelblechstärke genügend klein, d. h. die Windungszahl des Dämpferwickels entsprechend groß gewählt wird.

Literatur

- [1] RÜDENBERG, R.: Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen, 1906.
- [2] ROGOWSKI, W.: Über das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen, S. 1. Mitt. über Forschungsarbeiten auf dem Geb. des Ingenieurwesens, 1909.
- [3] BUCHHOLZ, H.: Schirmwirkung und Wirbelstromverluste eines hohlen kreiszylindrischen Leiters im magnetischen Wechselfeld. Arch. f. Elektrotechn. 23 (1929) S. 360.
- [4] FRÖHLICH, C.: Wirbelstromverluste in massiven schmiedeeisernen Platten und Ringen. Arch. f. Elektrotechn. 26 (1932) S. 321.
- [5] BOYAJIAN, A.: Leakage Reactance of Irregular Distributions of Transformer Windings by the Method of Double Fourier Series. Trans. AIEE 1954, Pow. App. a. Syst., S. 1078.
- [6] STIER, F., u. H. BLESSING: Siliziumgleichrichter mit regelbarem Transformator im Vergleich zum Leonardumformer. ETZ 79 (1958) S. 280.
- [7] Deutsche Patentanmeldung: Nr. L 15 060 VIII b/21 d² v. 27. 3. 1953.
- [8] NAGEL, G.: (Diplomarbeit 456). ETI, T. H. Karlsruhe 1956.
- [9] WOHLFARTH, W.: (Diplomarbeit 466). ETI, T. H. Karlsruhe 1958.
- [10] PLEGER, J.: (Studienarbeit). Aufnahme eines Strömungsfeldes. ETI, T. H. Karlsruhe 1958/59.
- [11] FISCHER, J.: Einführung in die klassische Elektrodynamik. Berlin: Springer 1936.
- [12] KADEN, H.: Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1959.
- [13] BRONSTEIN-SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: Teubner 1958.
- [14] HAYASHI, K.: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^* und e^{-*} . Berlin: De Gruyter 1928.

ALBERT KNOBLOCH, Karlsruhe, Kriegsstr. 47 a

Laplacesche Transformation, Anfangswerte und unstetige Funktionen, physikalische Dimensionen

Von

JOHANNES FISCHER

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 19. Mai 1961)

Inhaltsübersicht: 1. Bezeichnungen und Benennungen — 2. Anfangswerte — 3. Störungsfunktion und Anregungsgröße — 4. Sprungfähige Systeme — 5. Die Äquivalenz von Anfangswerten und Nadelimpulsen — 6. Sprung und Nadelimpulse als mathematische Funktionen und als physikalische Größen.

1. Bezeichnungen und Benennungen

Wir benutzen im folgenden die eindimensionale, einseitige Laplacesche Transformation nach der Definition

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s), \quad (1.1)$$

die heute in der Theorie der Systeme (der Elektrotechnik und der Regelungstechnik) und in den Integraltafeln bevorzugt wird, wir nennen $f(s)$ das Bild des Originalen $F(t)$, schreiben die Transformation des Bildes in das Original $^{-1}\mathfrak{L}\{f(s)\} = F(t)$, verstehen unter der Variablen t des Originalbereiches bevorzugt die Zeit, da wir Anfangswertprobleme betrachten, und nennen s die Variable des Bildbereiches (jedoch nicht „komplexe Frequenz“). — Wir erinnern noch daran, daß in dem Ausdruck für die Transformation der Ableitung

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dF}{dt} dt = s \cdot \mathfrak{L}\{F(t)\} - F(0) = s \cdot f(s) - F(0), \quad (1.2)$$

das zweite Glied nichts anderes ist, als der Wert des Integrales an der unteren Grenze 0. Deswegen ist es hier korrekt, diese Größe als Funktionswert $F(0)$ zu schreiben, und zulässig, sie als Integrationskonstante aufzufassen, denn sie ist ein von s unabhängiger fester Wert. Entsprechendes gilt für die zweiten und folgenden Glieder in

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L} \frac{d^2 F}{dt^2} &= s^2 \cdot f(s) - s \cdot F(0) - F'(0), \\ \mathfrak{L} \frac{d^{(n)} F}{dt^n} &= s^n \cdot f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Bei der Behandlung von Anfangswertproblemen im Zeitbereich $t \geq 0$ werden die Konstanten $F(0)$, $F'(0)$, \dots , $F^{(n-1)}(0)$ als die Anfangswerte gedeutet, und eben in dieser Möglichkeit wird ein besonderer Vorteil der Anwendung der einseitigen Laplaceschen Transformation gesehen. Was hierbei unter Anfangswerten zu verstehen ist, muß genau festgelegt werden.

Wir schreiben im folgenden die gesuchte Größe $Y(t)$ und nennen sie *Reaktion* (Wirkung, Antwortgröße, Ausgangsgröße), die auslösende (bewirkende) Größe schreiben wir $U(t)$ und nennen sie *Anregungsgröße* (Eingangsgröße).

Es wird sich also um die Anfangswerte der Reaktion $Y(t)$ und ihrer Ableitungen und ebenso um die Anfangswerte der Anregungsgröße $U(t)$ und ihrer Ableitungen handeln.

2. Anfangswerte

Anregungsgrößen (Störungsfunktionen) oder ihre Ableitungen sind oft im Punkte $t = 0$ unstetige Funktionen. Ein entscheidender Vorteil der LAPLACESchen Transformation besteht darin, daß die Bilder unstetiger Funktionen der reellen Variablen t reguläre Funktionen

der Variablen s sind (teils mit, teils ohne Einschränkungen), sodaß im Bildbereich die gesamten Hilfsmittel der Funktionentheorie zur Verfügung stehen. Dies war die entscheidende und vorher nicht in dieser Deutlichkeit ausgesprochene Erkenntnis K. W. WAGNERS in seiner Pionierarbeit 1916¹, in der er den „Operator“ HEAVISIDES als komplexe Variable gedeutet und ausgewertet hat.

Bei einer in $t = 0$ unstetigen Funktion ist die Antwort auf die Frage, was als Anfangswert zu gelten hat, nicht selbstverständlich. Wir erinnern an die folgenden Definitionen: Wir nennen rechtsseitigen Anfangswert $F(+0)$ den Grenzwert der Funktion $F(t)$, der dann eintritt, wenn das positive Argument $t = \varepsilon$ unbegrenzt abnimmt:

$$F(+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(0 + \varepsilon), \quad (2.1)$$

im Gegensatz zu dem linksseitigen Anfangswert, der entsprechend erklärt ist durch

$$F(-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(0 - \varepsilon). \quad (2.2)$$

A. Sind die Anregungsgröße $U(t)$ und ihre in Betracht kommenden Ableitungen *im Punkte* $t = 0$ *stetige Funktionen*, so ist für jede dieser Funktionen der rechtsseitige Anfangswert gleich mit dem linksseitigen. Die einseitige LAPLACESche Transformation hat aber zur Voraussetzung, daß die Störung erst für $t = 0$ einsetzt und für $t < 0$ fortwährend null war. Daher sind in diesem Fall die Anfangswerte der Anregung und ihrer in Betracht kommenden Ableitungen alle einzeln null:

$$U(+0) = U'(+0) = \dots = U^{(m)}(+0) = 0. \quad (2.3)$$

Sind die Anregung und ihre Ableitungen stetig in $t = 0$, so müssen in diesem Punkte auch die Reaktion $Y(t)$ und ihre in Betracht kommenden Ableitungen stetig sein. Die Anfangswerte können also *nur* durch den Zustand des Systemes, der für $t < 0$ geherrscht hat, also durch seine Vergangenheit, bestimmt sein. Wir dürfen sie darum schreiben

$$Y(0) = Y(-0), \dots Y^{(n-1)}(0) = Y^{(n-1)}(-0).$$

Diese Anfangswerte nennen wir die *Vergangenheitswerte*. Sie sind also grundsätzlich unabhängig von der Anregung.

Wir sagen, ein System werde aus dem Zustand völliger Ruhe oder völliger Entspanntheit heraus angeregt, wenn seine Vergangenheitswerte alle einzeln null sind:

$$Y(-0) = \dots = Y^{(n-1)}(-0) = 0. \quad (2.4)$$

Dieser einfache Sachverhalt legt den Gedanken nahe, bei komplizierteren unstetigen Anregungsarten dadurch mathematische Schwierigkeiten zu umgehen, daß man zum Beispiel einen Sprung durch einen stetigen Übergang ersetzt, und erst im Ergebnis der Rechnung $Y(t)$ die Parameter der Anregungsgröße $U(t)$ so wählt, daß ihr Anstieg hinreichend steil verläuft. Unstetige Funktionen erscheinen so als Grenzwerte stetiger. Bei der Untersuchung des Zeitverhaltens reeller Systeme ist es ohnehin schon aus physikalischen Gründen nicht erforderlich, mit Sprüngen, Nadelimpulsen, Doppelstößen und so weiter zu rechnen, die in mathematischem Sinne beliebig (unbegrenzt) kurze Zeit dauern. Stetige Anregungsfunktionen, die den Anforderungen einer vorgelegten Aufgabe genügen und hinreichend einfache Bilder haben, lassen sich oft finden.

B. Bei *in Strenge unstetiger Anregung* liegen die Verhältnisse weniger einfach. Springt zum Beispiel die Anregungsgröße im Zeitpunkt $t = 0$ in einer unbegrenzt kleinen Zeitspanne vom Werte null auf einen endlichen Wert U_0 , so kann es vorkommen, daß die Reaktion in demselben Zeitpunkt gleichfalls springt.

Als Beispiele betrachten wir die zwei einfachen elektrischen Netze Bilder 1a und 1b. Die gesuchte Größe, die Reaktion $Y(t)$, ist die Spannung $U_2(t)$, die Anregungsgröße $U(t)$ ist die Spannung $U_1(t)$. Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Systeme sich für $t < 0$ in völliger

¹ K. W. WAGNER, Arch. f. Elektrotechn. 4 (1916) S. 159—163.

Ruhe befinden, also ohne Ströme und Spannungen sind: daher ist $U_2(-0) = 0$. Nun sei die in $t = 0$ eintretende Anregung ein Sprung von der Höhe U_0 , also $U_1(+0) = U_0$. Dann ist für das Netz 1b ersichtlich der rechtsseitige Anfangswert der Reaktion $U_2(+0) = U_0$, denn für $t = 0$ war das Netz nach Voraussetzung stromlos. In diesem Fall ist für das Netz 1a desgleichen $U_2(+0) = U_0$, denn für $t = 0$ war nach Voraussetzung die Kapazität C ladungslos, daher spannungslos. In diesen beiden Fällen springen die Anregung und die

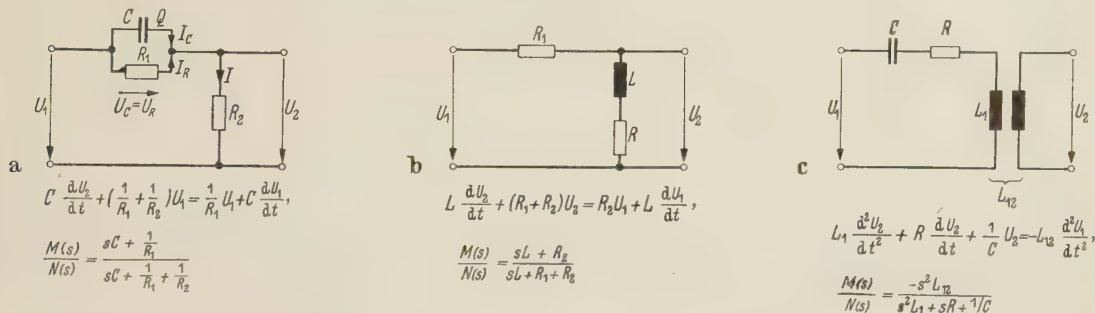


Bild 1 a—c. Beispiele einfacher Netze. Anregungsgröße: Spannung $U_1(t)$, Reaktion: Spannung $U_2(t)$. — Differentialgleichung (3.2), Übertragungsfunktion (3.13).

Reaktion gleichzeitig auf die gleiche Höhe. In anderen Fällen ist der Sprung gleichzeitig, aber nicht gleich groß: werden zum Beispiel in dem Netz 1a die beiden Klemmen, zwischen die der Pfeil U_2 gezeichnet ist, durch eine Kapazität C_2 miteinander verbunden, so wird dadurch der gleichzeitige Sprung der Reaktion nicht etwa unterbunden, wie man vermuten könnte, vielmehr hat er die Größe $U_2(+0) = U_0 \cdot C/(C + C_2)$, er ist also kleiner, als der Sprung U_0 der Anregung. Ist die Anregung ein Sprung, so beginnt in diesen Fällen die Reaktion $U_2(t)$ aus dem Zustand völliger Ruhe heraus mit einem von Null verschiedenen rechtsseitigen Anfangswert $U_2(+0)$. — Es kann, es muß aber nicht so sein: wird zum Beispiel das Netz 1b so verändert, daß die Selbstinduktivität L nicht in Reihe mit dem Widerstand R_2 , sondern mit R_1 liegt, so daß also die Klemmen, zwischen die der Pfeil U_2 gezeichnet ist, die Klemmen des Widerstandes R_2 sind, so ist $U_2(+0) = 0$ bei springender Anregung.

Es gibt offenbar zwei Arten von Anfangswerten: solche, die durch die Vorgeschichte (die Vergangenheit) des Systemes und nur durch diese bestimmt sind (a in Bild 2) und solche, die durch die besondere unstetige Art der Anregung und nur durch diese verursacht sind (b in Bild 2).

Man kann also nicht allgemein vorschreiben, daß die Lösungsfunktion $Y(t)$ für $t > 0$ sich stetig an den Vergangenheitswert anschließen muß; es gibt sprungfähige Systeme.

Eine Funktion $F(t)$, die im Punkte $t = 0$ springt, derart, daß $F(t) = 0$ für $t < 0$ und $F(t) = F_0 = \text{const}$ für $t > 0$ ist, hat für $t = 0$ einen unbestimmten Funktionswert (zwischen 0 und F_0); von anderen Funktionen kann die Ableitung nach t in diesem Punkte nicht gebildet werden, sie existiert nicht. Man muß den Punkt $t = 0$ ausschließen. Das bedeutet, daß die Rechnung (die Lösung einer vorgelegten Aufgabe) sich auf den Bereich $t \geq +0$ erstreckt und daß daher die rechtsseitigen Anfangswerte genommen werden müssen. (In der Tat ist dann zum Beispiel für die oben definierte Sprungfunktion eindeutig $F(+0) = F_0$ und $F'(+0) = 0$).

Wenn einerseits aus mathematischen Gründen der Punkt $t = 0$ notwendig ausgeschlossen werden muß, wenn andererseits ein rechtsseitiger Anfangswert, etwa $Y(+0)$, sich von dem Vergangenheitswert $Y(-0)$ unterscheiden kann, wie zum Beispiel bei unstetiger Anregung sprungfähiger Systeme, dann liegt die Frage nahe, ob in einem solchen Falle für die Durchführung der Methode der LAPLACESchen Transformation der rechtsseitige Anfangswert $Y(+0)$

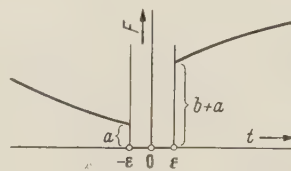


Bild 2. $F(t)$ hat an der Stelle $t = 0$ einen Sprung.

vorausgesetzt, also durch andere, unabhängige Überlegungen gefunden werden muß, oder ob durch die Rechnung der Sprungwert $Y(+0) - Y(-0)$ erbracht wird. Müßte der Sprungwert vorausgesetzt werden, so wäre das in der Tat eine ernsthafte Schwierigkeit für die Methode der LAPLACESchen Transformation, denn bei Systemen, die nur wenig verwickelter sind, als die gezeigten Beispiele, kann der Sprungwert $Y(+0) - Y(-0)$ nur selten mehr durch physikalische Überlegungen mit Sicherheit vorhergesagt werden².

Die Frage läßt sich recht einfach beantworten, wenn man zuerst ein Beispiel untersucht und erst dann auf allgemeine Betrachtungen übergeht. Wir wählen das Netz nach Bild 3 (S. 305). Die Systemgleichungen sind

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_C + I R + L \frac{dI}{dt}, \\ U_2 &= U_L = L \frac{dI}{dt}, \\ I &= C \frac{dU_C}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

mit den Anfangswerten (Vergangenheitswerten)

$$U_C(0) = Q_0/C \text{ und } I(0) = I_0 \quad \text{für } t = -0. \quad (2.6)$$

Über die Anregungsgröße $U_1(t)$ besagen diese Anfangswerte also, daß sie einen Anfangswert $U_1(0) \neq 0$ hat. Wir wollen daher im folgenden, ohne die Formelzeichen zu ändern, für $t > 0$ unter $U_1(t)$ und $U_2(t)$ die Größen verstehen, die sich zu den Vergangenheitswerten addieren.

Man kann nun die Methode der LAPLACESchen Transformation entweder so anwenden, daß man aus den Gleichungen (2.5) durch Elimination die Differentialgleichung herstellt, die die Reaktion $U_L(t)$ mit der Anregung $U_1(t)$ verbindet, und dann diese in den Bildbereich transformiert, oder so, daß man die Systemgleichungen (2.5) unmittelbar in den Bildbereich übersetzt und dort durch Eliminationen die algebraische Gleichung zwischen dem Bild $u_L(s)$ der Reaktion und dem Bild $u_1(s)$ der Anregung herstellt.

A. Wir beginnen mit dem zweiten Wege. Die Bildgleichungen zu (2.5) sind

$$\left. \begin{aligned} u_1(s) &= u_C(s) + s L i(s) - L I(0) + R i(s), \\ u_L(s) &= s L i(s) - L I(0), \\ i(s) &= s C u_C(s) - C U_C(0). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Indem man zuerst $u_C(s)$, darauf $i(s)$ eliminiert, erhält man das Bild der Reaktion

$$u_L(s) = u_1(s) \frac{s^2 L C}{s^2 L C + s R C + 1} - \frac{s L C \cdot U_C(0) + s L R C \cdot I(0) + L \cdot I(0)}{s^2 L C + s R C + 1}. \quad (2.8)^3$$

Welche Anfangswerte werden hier gefordert? Mit Sicherheit ist $Q(+0) = Q(-0) = Q_0$, dies auch dann, wenn $U_1(t)$ in $t = 0$ auf den Wert U_0 springt. In (2.8) ist daher $U_C(0) = Q_0/C$ der Vergangenheitswert. Mit derselben Sicherheit ist $I(+0) = I(-0) = I_0$; auch wenn $U_1(t)$ in $t = 0$ springt, hat in diesem Punkt $I(t)$ keinen Sprung. In (2.8) hat daher $I(0)$ mit Sicherheit die Bedeutung des Vergangenheitswertes. Die Frage nach dem rechtsseitigen Anfangswert der Reaktion $U_L(+0)$ kann zwar hier noch leicht beantwortet werden: es ist $U_L(+0) = U_1(+0) = U_0$, aber diese Frage ist auf diesem Wege der Rechnung gar nicht gestellt. — Es sind zwei rechtsseitige Anfangswerte aufgetreten, die mit völliger Sicherheit als die Vergangenheitswerte Q_0/C und I_0 erkannt sind.

² Zum Beispiel spricht G. WUNSCH (Z. f. Hochfrequenz. u. Elektroak. 69 (1960) S. 133—149) die Ansicht aus, daß diese Anfangswerte „durch mühevollen Rechnungen und physikalische Überlegungen erst ermittelt werden müssen“. Er urteilt daher auch, daß „die Methode der Laplace-Transformation den praktischen Problemen gar nicht so ideal angepaßt ist, wie gemeinhin angenommen wird“. — Wir können uns diesen Meinungen nicht anschließen. Die weiteren Ausführungen dieses 2. Abschnittes sollen zeigen, daß sie unzutreffend sind.

³ — $\frac{L_{12}}{L} u_L(s)$ ist das Bild der Ausgangsspannung $U_2(t)$ des Netzes nach Bild 1 c.

Wir haben nun zu zeigen, daß die Methode den rechtsseitigen Anfangswert der Reaktion $U_L(+0)$ auch dann ergibt, wenn $U_1(t)$ die erwähnte Sprungfunktion ist, daß die Methode also auch dann nicht diesen Anfangswert etwa als Voraussetzung erfordert. Dazu werden wir einfachheitshalber von dem völlig entspannten System ausgehen und also $U_C(0) = I(0) = 0$ in (2.8) setzen. Ist nun $U_1(t)$ der Sprung der Höhe U_0 in $t = 0$, so ist $u_1(s) = U_0/s$. Wir wenden auf (2.8) unter der gegebenen Voraussetzung den Grenzwertsatz an

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot f(s) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(+0) \quad (2.9)$$

und erhalten sofort⁴

$$U_L(+0) = U_0. \quad (2.10)$$

Um einzusehen, daß der rechtsseitige Anfangswert der Reaktion, also der Sprungwert, ein Ergebnis und nicht etwa eine Voraussetzung der Rechnung ist, braucht man hier somit nicht einmal in den Originalbereich zu transformieren.

B. Der andere Weg der Rechnung beginnt damit, daß man aus den Systemgleichungen im Originalbereich durch Eliminationen die Gleichung herstellt, die zwischen Anregung und Reaktion besteht. Diese Gleichung wird hier aus (2.5) erhalten zu

$$\frac{d^2 U_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_L}{dt} + \frac{1}{LC} U_L = \frac{d^2 U_1}{dt^2}. \quad (2.11)$$

Diese Gleichung hat nur dann einen Sinn (sie ist nur dann anwendbar), wenn die Anregungsfunktion $U_1(t)$ ohne Einschränkung eine zweite Ableitung nach t hat. Ob diese Voraussetzung erfüllt ist, muß im einzelnen Fall geprüft werden. Indem man dann (2.11) schematisch mit Hilfe der Regel (1.2,3) transformiert, erhält man

$$u_L(s) \left\{ s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right\} - \left(s + \frac{R}{L} \right) U_L(0) - U_L'(0) = s^2 u_1(s) - s U_1(0) - U_1'(0). \quad (2.12)$$

Vier Anfangswerte sind zu interpretieren. Hier wird man zunächst zur Vereinfachung, da $U_1(t)$ als zweimal differentiierbar vorausgesetzt wird, setzen

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} = \Psi(t). \quad (2.13)$$

Dann hat man an Stelle von (2.12) zwar einfacher

$$u_L(s) \left\{ s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right\} - \left(s + \frac{R}{L} \right) U_L(0) - U_L'(0) = \psi(s), \quad (2.14)$$

jedoch befindet man sich auch dann nicht auf gleich sicherem Boden, wie auf dem ersten Wege (A) der Rechnung: Vermutet man, daß bei Anregung durch einen Sprung als rechtsseitige Anfangswerte $U_L(+0)$ und $U_L'(+0)$ die Vergangenheitswerte, vermehrt um die Sprungwerte, einzusetzen sind, so wird man in diesem einfachen Falle zwar den Sprungwert $U_L(+0) = U_0$ noch mit Sicherheit, aber den zuständigen Wert $U_L'(+0)$ nicht mehr so leicht vorhersagen können. Ist dagegen bekannt, daß als rechtsseitige Anfangswerte die Vergangenheitswerte einzusetzen sind (die also von der Anregung nicht abhängen), so hat man damit zwar eine eindeutige Grundlage für die Rechnung, jedoch müssen dazu diese Vergangenheitswerte $U_L(0) = L \cdot I'(0)$ und $U_L'(0) = L \cdot I''(0)$ bekannt sein. Aber diese Werte sind im allgemeinen gar nicht unmittelbar gegeben, viel näher liegen die Vergangenheitswerte $U_C(0) = Q_0/C$ und $I(0) = I_0$, die auf dem ersten Wege (A) ganz von selbst in die Rechnung eingegangen sind und auch eine unmittelbar anschauliche physikalische Bedeutung haben. (Die Quadrate dieser Größen bestimmen die für $t = -0$ bestehenden Augenblickswerte der elektrischen Energie, der magnetischen Energie, der Stromwärmeleistung.) —

⁴ $s \cdot u_L(s) = s \frac{U_0}{s} \frac{s^2 L C}{s^2 L C + s R C + 1}.$

Nachdem man dann die Gl. (2.14) gelöst und die Lösung transformiert hat, hat man erst den Zusammenhang erhalten zwischen der Reaktion $U_L(t)$ und der Störungsfunktion $\Psi(t)$; um aber den Zusammenhang der Reaktion mit der Anregungsgröße $U_1(t)$ zu erhalten, muß man in einem zweiten Schritt die Differentialgleichung (2.14) lösen, also zwei Integrationen bezüglich der Variablen t mit bestimmten Grenzen ausführen, anders gesagt: man muß zwei Integrationskonstante kennen. Man kann zum Beispiel (2.13) in den Bildbereich transformieren. In dem Fall, daß $U_1(t)$ der Sprung der Höhe U_0 in $t = 0$ ist, ist die Bildgleichung von (2.13) nach der Transformationsregel für die Ableitungen der Sprungfunktion allerdings einfach

$$\psi(s) = s^2 \frac{U_0}{s} = U_0 s; \quad (2.15)$$

die Größen $U_1(+0)$ und $U_1'(+0)$ gehen also in diesem besonderen Falle nicht ein, vergleiche (6.2,4).

Der zuerst (A) gezeigte Weg (Übersetzung der einzelnen Systemgleichungen in den Bildbereich) hat ersichtlich die größere Sicherheit, ihm gegenüber wirkt der andere Weg (B, Eliminationen im Originalbereich) unsicher und hinsichtlich der Anfangswerte sogar beinahe gekünstelt. Hierauf hat insbesondere G. DOETSCH hingewiesen⁶.

C. Im allgemeinen Fall sind die einzelnen Gleichungen eines Systemes teils algebraische Gleichungen, teils Differentialgleichungen; es können auch bestimmte Integrale als Glieder auftreten. Der Praktiker hat bisher immer wohl schon ohne Bedenken die Gleichungen eines Systemes einzeln in den Bildbereich übersetzt und dort weitergerechnet⁵. Aber eine allgemeine Untersuchung darüber, ob dieses Vorgehen in jedem Falle zur richtigen Lösung führt, hat doch wohl als erster G. DOETSCH angestellt⁶. Hiernach gilt folgendes:

Liegt ein System von Differentialgleichungen vor (in unserem Beispiel die Gl. (2.5)), so läßt sich das Kennzeichen dafür angeben, wann die Anfangswerte beliebig vorgeschrieben werden können; dazu ist es notwendig und hinreichend, daß die Determinante aus den Koeffizienten der höchsten Ableitungen der Lösungsfunktionen nicht verschwindet. Liegt dieser Fall vor, so sind die vorzuschreibenden Anfangswerte selbstverständlich die Vergangenheitswerte; sie werden von den Lösungen mit Sicherheit angenommen: die Vergangenheitswerte sind zugleich die rechtsseitigen Anfangswerte. Liegt dieser Fall nicht vor (wie etwa in dem Beispiel der Gl. (2.5)), so können die rechtsseitigen Anfangswerte nicht beliebig (eben als die Vergangenheitswerte) vorgeschrieben werden, jedoch lassen sich in diesem Fall die Bedingungen dafür angeben, daß es eine Lösung der Anfangswertaufgabe gibt. Diese Bedingungen stellen sich dar als Gleichungen, die zwischen den rechtsseitigen Anfangswerten der Lösungsfunktionen und dem rechtsseitigen Anfangswert der Anregungsfunktion bestehen müssen, und entsprechendes gilt für die Ableitungen an der Stelle $t = +0$ bis zur $(n-1)$ ten, wenn die Differentialgleichungen von n -ter Ordnung sind. Die rechtsseitigen Anfangswerte der Lösungsfunktionen und ihrer Ableitungen werden somit *in diesem Fall* durch die rechtsseitigen Anfangswerte der Anregungsfunktion und ihrer Ableitungen *mitbedingt*, sie können nicht unabhängig von diesen einfach als die Vergangenheitswerte vorgeschrieben werden. Springt also die Anregungsfunktion $U(t)$ an der Stelle $t = 0$ vom Wert $U(-0) = 0$ auf den Wert $U(+0) = U_0$, so haben die erwähnten Verknüpfungsgleichungen zur Folge, daß der rechtsseitige Anfangswert $Y(+0)$ verschieden sein *muß* vom Vergangenheitswert $Y(-0)$, sodaß also die Lösungsfunktion $Y(t)$ gleichfalls in $t = 0$ springt.

Aber der Sprungwert $Y(+0) - Y(-0)$ wird bei der Methode der LAPLACESchen Transformation durch die Rechnung erbracht, er muß nicht etwa als Voraussetzung zur Verfügung gestellt werden (er muß nicht etwa bekannt sein, bevor die Lösung $Y(t)$ bekannt ist und damit

⁵ Beispiele für dieses Vorgehen auch bei K. W. WAGNER, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, Leipzig 1950.

⁶ Vergleiche G. DOETSCH, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, S. 67–69, München 1956 und: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 105–123, Basel und Stuttgart 1958, dort allgemeine Beweisführung und Beispiele.

sie überhaupt hergestellt werden kann). Das hat auch das Beispiel gezeigt, und zwar auf dem Rechnungsweg A) der Eliminationen im Bildbereich mit großer, auf dem Weg B) der Eliminationen im Originalbereich mit geringer Sicherheit. Wir werden darum diese wichtige Tatsache im 4. Abschnitt allgemeiner nachweisen.

Es ist somit für die Anwendung der Methode der LAPLACESchen Transformation ganz gleichgültig, ob ein System von Differentialgleichungen die Bedingungen, unter welchen die Anfangswerte beliebig vorgeschrieben werden können, erfüllt oder nicht. Die Lösungsmethode ist dieselbe; im zweiten Fall stellt die Rechnung von selbst die allenfalls auftretenden Sprungwerte der Reaktion und ihrer Ableitungen her. In jedem Fall sind daher als Anfangswerte die Vergangenheitswerte einzusetzen; sie sind von der Anregung unabhängig.

Wird ein System aus dem Zustand der Ruhe heraus angeregt, so ist das Bild der Reaktion von der Form

$$y(s) = u(s) \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{\Psi(s)}{N(s)}, \quad (2.16)$$

wie das Beispiel (2.8) gezeigt hat.

3. Störungsfunktion und Anregungsgröße

In mathematischen Darstellungen wird die Methode der LAPLACESchen Transformation bevorzugt gelehrt an dem Beispiel der einfachen Anfangswertaufgabe:

Gegeben die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} a_n \frac{d^{(n)}Y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dY}{dt} + a_0 Y &= \Psi(t) \\ \text{und die Anfangswerte } Y^{(n-1)}(0), \dots, Y'(0), Y(0); \\ \text{gesucht } Y(t) \text{ für } t \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Hierin sind die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 reelle Konstante, $\Psi(t)$ ist die Störungsfunktion im mathematischen Sinne (in der ein absolutes Glied nicht grundsätzlich ausgeschlossen ist), und es sind gerade diese Anfangswerte einzeln gegeben.

In der Theorie der linearen Systeme (der Elektrotechnik, der Regelungstechnik, der Schwingungstechnik) fragt man nach der Wirkung $Y(t)$ einer Anregung $U(t)$. Die (mathematische) Störungsfunktion $\Psi(t)$ und die (physikalische) Anregungsgröße $U(t)$ sind im allgemeinen nicht dasselbe, vielmehr zeigen schon einfache Beispiele (vergleiche Bild 1), daß für ein gegebenes System in Bezug auf eine gegebene Anregungsgröße sich eine Differentialgleichung von diesem Bau ergibt:

$$a_n \frac{d^{(n)}Y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dY}{dt} + a_0 Y = b_0 U + b_1 \frac{dU}{dt} + \dots + b_m \frac{d^{(m)}U}{dt^m}. \quad (3.2)$$

Hierin sind die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 und ebenso die Koeffizienten b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 reelle Konstante, die durch die Eigenschaften des Systemes, und nur durch diese, gegeben sind (zum Beispiel durch die konzentrierten Schaltelemente eines gegebenen elektrischen Netzes).

Selbstverständlich besteht kein Widerspruch zwischen den Formulierungen (3.1) und (3.2), denn wenn die Anregungsgröße $U(t)$ gegeben ist, kann der Differentialausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in (3.2) gliedweise errechnet und zur Störungsfunktion $\Psi(t)$ zusammengefaßt werden (falls $U(t)$ differenziert werden kann); indessen gerade diesen Schritt unterläßt im allgemeinen die Systemtheorie aus einem Grunde, an den wir sogleich erinnern werden.

Indem man erstens die Differentialgleichung (3.1) gliedweise in den Bildbereich transformiert und dort nach der Bildfunktion der Reaktion auflöst, erhält man bekanntlich

$$y(s) = \frac{\psi(s)}{N_n(s)} + \frac{P_{n-1}(s; Y^{(n)}(0))}{N_n(s)} = y_i(s) + y_h(s). \quad (3.3)$$

Hierin ist

$$N_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (3.4)$$

Wir nennen diese ganze rationale Funktion das kennzeichnende Polynom, denn sie wird allein durch die Koeffizienten a_v und nicht durch die Anfangswerte der einzelnen Aufgabe und auch nicht durch die besondere Störungsfunktion bestimmt. $\psi(s)$ ist das Bild der Störungsfunktion, $P_{n-1}(s; Y^{(v)}(0))$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade $n-1$ in s , deren Koeffizienten sowohl durch die Koeffizienten a_v , als auch durch die sämtlichen Anfangswerte $Y^{(v)}(0)$ der besonderen Aufgabe bestimmt werden, und zwar so, daß das Polynom verschwindet, wenn alle Anfangswerte null sind:

$$P_{n-1}(s; Y^{(v)}(0)) = 0 \quad \text{für} \quad Y^{(n-1)}(0) = \dots = Y'(0) = Y(0) = 0. \quad (3.5)$$

Zum Beispiel ist für $n = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= a_1 Y(0), \\ P_1 &= \{a_2 s + a_1\} Y(0) + a_2 Y'(0), \\ P_2 &= \{a_3 s^2 + a_2 s + a_1\} Y(0) + \{a_3 s + a_2\} Y'(0) + a_3 Y''(0). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Die Anfangswerte in (3.3) sind immer die Vergangenheitswerte, wie im vorangegangenen zweiten Abschnitt festgestellt worden war. Hiernach ist $Y_i(t) = {}^{-1}\mathcal{L} y_i(s)$ die Reaktion auf eine in $t = 0$ einsetzende äußere Anregung, die vorher null war, bei verschwindenden Anfangswerten (wenn also das System vorher in Ruhe war), und $Y_h(t) = {}^{-1}\mathcal{L} y_h(s)$ ist die Reaktion auf die Vergangenheitswerte bei verschwindender äußerer Anregung (wenn also das System frei, in sich geschlossen, ist). Man kann also immer, wenn man will, diese beiden Vorgänge getrennt behandeln. Man kann aber auch in der Bildfunktion (3.3) zusammenfassen

$$\psi(s) + P_{n-1}(s; Y^{(v)}(0)) = H(s), \quad (3.7)$$

so daß man die Bildfunktion

$$y(s) = \frac{H(s)}{N_n(s)}, \quad (3.8)$$

in den Originalbereich zu übersetzen hat. Ist $\Psi(t)$ die Sprungfunktion der Höhe U_0 in $t = 0$ (also $\psi(s) = U_0/s$) und ist $y(s)$ eine gebrochene rationale Funktion, so ist die Übersetzung der in Partialbrüche zerlegten Bildfunktion $y(s)$ in den Originalbereich der HEAVISIDESCHE Entwicklungssatz

$$y(t) = \frac{H(0)}{N_n(0)} + \frac{H(s_1)}{s_1 \cdot N'_n(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{H(s_n)}{s_n \cdot N'_n(s_n)} e^{s_n t}; \quad (3.9)$$

s_1, \dots, s_n sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $N_n(s) = 0$ ⁷. In der Funktion $H(s)$, die im Originalbereich mit den diskreten Werten $H(s_1), \dots, H(s_n)$ auftritt, sind die Anfangswerte enthalten, vgl. (3.7). Der Entwicklungssatz (3.9) gilt also durchaus nicht etwa nur unter der einschränkenden Voraussetzung, daß alle Anfangswerte null sind (er gilt nicht nur ausschließlich für völlig entspannte Systeme). Hierauf hat schon WAGNER hingewiesen⁸; gleichwohl findet sich diese irrije Meinung auch heute noch gelegentlich in der Literatur.

Indem man zweitens die Differentialgleichung (3.2) schematisch gliedweise in den Bildbereich transformiert und dort nach der Bildfunktion der Reaktion auflöst, erhält man

$$y(s) = u(s) \frac{M_m(s)}{N_n(s)} + \frac{1}{N_n(s)} \{P_{n-1}(s; Y^{(v)}(0)) - Q_{m-1}(s; U^{(v)}(0))\}. \quad (3.10)$$

⁷ Die angeschriebene Form (3.9) gilt, wenn unter den n Wurzeln keine untereinander gleichen vorhanden sind.

⁸ K. W. WAGNER, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, S. 67, Leipzig 1950.

Hierin ist $N_n(s)$ das in (3.4) angegebene kennzeichnende Polynom, $u(s)$ ist das Bild der Anregungsfunktion $U(t)$, ferner ist

$$M_m(s) = b^m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0. \quad (3.11)$$

Das Polynom $P_{n-1}(s; Y^{(v)}(0))$ ist dasselbe, wie oben angegeben, vergl. (3.5, 6,) schließlich ist $Q_{m-1}(s; U^{(v)}(0))$ eine ganz entsprechend gebaute ganze rationale Funktion vom Grade $m - 1$ in s ; ihre Koeffizienten sind durch die Koeffizienten b_v und durch die Anfangswerte der Anregungsfunktion und ihrer Ableitungen, also durch $U^{(m-1)}(0), \dots, U'(0), U(0)$ gegeben. Das Polynom Q_{m-1} ist durch die Transformation der Ableitungen der Anregungsgröße entstanden.

Nach dem oben Gesagten sind die Anfangswerte in (3.10) die Vergangenheitswerte. Sind also die Anregung $U(t)$ und ihre Ableitungen in $t = 0$ stetige Funktionen, so ist $Q_{m-1} = 0$ nach (2.3). Ist $U(t)$ die Sprungfunktion oder eine Pseudofunktion (ein einfacher oder mehrfacher Nadelimpuls, eine einfache oder mehrfache Zacke), so sind hinsichtlich der Größen $U(+0), U'(+0), \dots$ in Q_{m-1} die Transformationsregeln für die Ableitungen dieser Funktionen zu beachten, die formal von (1.2, 3) abweichen, vergleiche (6.1, 2, 3, 4). Hierauf hatten wir schon im Beispiel aufmerksam gemacht, vergleiche (2.13, 15).

Ist ein lineares System (elektrisches Netz, Regelungssystem) vorgelegt, so beginnt man im allgemeinen die Rechnung nicht damit, die Differentialgleichung (3.2) aufzustellen, vielmehr bestimmt man die Wirkungsgröße $Y(t)$, die zu einer sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω schwingenden Anregungsgröße $U(t) = \hat{U} e^{j\omega t}$ im eingeschwungenen Zustand ($-\infty \leq t \leq \infty$; keine Anfangswerte) gehört: $Y(t) = \hat{Y} e^{j\omega t}$. Der Quotient

$$\frac{\hat{Y}(\omega)}{\hat{U}(\omega)} = G(\omega), \quad (3.12)$$

ist eine einfach bestimmbare Funktion der Frequenz (Übertragungsfunktion; komplexe Frequenzcharakteristik). Dann gilt

$$\frac{M_m(s)}{N_n(s)} = \{G(\omega)\}_{j\omega=s}. \quad (3.13)^9$$

Das Bild der Reaktion (3.10) des aus dem Zustand völliger Ruhe heraus angeregten Systemes ($P_{n-1} = 0$) wird also mit (3.13) unmittelbar erhalten; dagegen ist die Herstellung der Differentialgleichung (3.2) aus den einzelnen Gleichungen des Systemes oft eine umständliche Eliminationsarbeit¹⁰.

4. Sprungfähige Systeme

Ein sprungfähiges System hat die Eigenschaft, daß die Reaktion (die Ausgangsgröße) $Y(t)$ gleichzeitig mit der Anregung (Eingangsgröße) $U(t)$ springt, und zwar ist $Y(+0) - Y(-0) = \text{const} \cdot U_0$, wenn der Sprung der Anregung in $t = 0$ die Größe $U(+0) - U(-0) = U_0$ hat. Die Eigenschaft, sprungfähig zu sein, hängt nicht allein ab von den Konstanten des Systemes (zum Beispiel von den konzentrierten Schaltelementen des elektrischen Netzes), sondern auch davon, welche Größen als Eingangsgröße und als Ausgangsgröße betrachtet werden. Bei gegebener, springender Eingangsgröße kann von zwei verschiedenen Ausgangsgrößen die eine springen, die andere nicht.

a) Liegt die Differentialgleichung (3.2) des Systemes vor, so erkennt man die Sprungfähigkeit daran, daß $m = n$ ist.

⁹ Aber $\{G(\omega)\}_{j\omega=s} = \text{const}/N_n(s)$ nur in dem besonderen Falle $M_m(s) = \text{const}$. — Man kann die Beziehung (3.13) dadurch evident machen, daß man $\hat{U} e^{j\omega t}$ und $\hat{Y} e^{j\omega t}$ in die Differentialgleichung (3.2) einsetzt.

¹⁰ Man darf nicht die beiden Funktionen $M_m(s)/N_n(s)$, vergleiche (3.11, 13), und $H(s)/N_n(s)$, vergleiche (3.7, 8), miteinander verwechseln. Beide können Quotienten von Polynomen sein. Aber $H(s)$ ist nach (3.7) eine Funktion, die durch die Koeffizienten a_v und die Anfangswerte der Reaktion und ihrer Ableitungen bestimmt wird; $M_m(s)$ ist nach (3.11) ein Polynom mit dem Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_m , das keine Anfangswerte enthält.

b) Liegt die komplexe Übertragungsfunktion (3.12) und daher die Funktion $M_m(s)/N_n(s)$ für den Bildbereich vor, und ist diese von der Form

$$\frac{M_m(s)}{N_n(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (4.1)$$

so ist das System sprunghfähig, wenn $m = n$ ist. Dann kann man nämlich (4.1) umformen zu

$$\frac{M_m(s)}{N_n(s)} = c - \frac{R_{n-1}(s)}{N_n(s)}; \quad (4.2)$$

hierin ist $c = b_n/a_n$ eine Konstante und $R_{n-1}(s)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ in s . Man kann daher das Bild der Reaktion des aus dem Zustand der Ruhe heraus angeregten Systemes (2.17) schreiben

$$y(s) = \frac{b_n}{a_n} u(s) - u(s) \frac{R_{n-1}(s)}{N_n(s)}. \quad (4.3)$$

Die Übersetzung in den Originalbereich macht aus dem ersten Gliede $(b_n/a_n) \cdot U(t)$, aus dem zweiten Gliede ein Faltungsprodukt, dessen einer Faktor $U(t)$ ist. Schreiben wir den zweiten Faktor $Z(t)$, so ist also

$$Y(t) = \frac{b_n}{a_n} \cdot U(t) - U(t) * Z(t); \quad (4.3a)^{10a}$$

die Reaktion hat daher in $t = 0$ das gleiche Zeitverhalten, wie die Anregung $U(t)$; springt in diesem Punkt $U(t)$, so tut dies auch $Y(t)$.

c) Da man beim sprunghfähigen System weiß, daß $Y(+0)$ existiert, kann man den Grenzwertsatz anwenden, der aussagt

$$Y(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s y(s). \quad (4.4)$$

Springt die Anregung in $t = 0$ von null auf U_0 , ist also $u(s) = U_0/s$, und liegt die Form (4.1) vor, so ergibt (4.4)

$$Y(+0) = U_0 \frac{b_n}{a_n} \quad (4.5)$$

für den rechtsseitigen Anfangswert (Sprungwert) der Reaktion (Ausgangsgröße).

Weiß man zum Voraus, daß ein Endwert $Y(\infty)$ existiert, so erhält man aus dem anderen Grenzwertsatz

$$Y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) \quad (4.6)$$

diesen unter den angegebenen Voraussetzungen zu

$$Y(\infty) = U_0 \frac{b_0}{a_0}. \quad (4.7)$$

d) Als Beispiel für (4.3) betrachten wir das Netz nach Bild 3. Das Bild der Reaktion bei verschwindenden Anfangswerten läßt sich aus (2.8) umformen zu

$$u_L(s) = u_1(s) - u_1(s) \frac{s R C + 1}{s^2 L C + s R C + 1}. \quad (4.9)$$

Die Übersetzung in den Originalbereich läßt sich schreiben

$$U_L(t) = U_1(t) - U_1(t) * \frac{(1 + s_1 R C) e^{s_1 t} - (1 + s_2 R C) e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}. \quad (4.10)$$

^{10a} Vgl. K. W. WAGNER, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, S. 401, Leipzig 1950; G. DOETSCH, Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Paragraph 14, insbesondere S. 115ff und das Zahlenbeispiel S. 119, Basel und Stuttgart 1958.

Hierin sind s_1 und s_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $s^2 L C + s R C + 1 = 0$; sind diese komplex, $s_1 = s_2^*$, so läßt sich der Ausdruck noch leicht umformen. — Man sieht aus (4.10): die Reaktion $Y(t)$ hat in $t = 0$ das gleiche Zeitverhalten, wie die Anregung $U(t)$; ist diese ein Sprung der Höhe U_0 , so ist $Y(+0) = U_0$. Dieses selbe Ergebnis erhält man auch aus (4.5), denn in (2.8) ist $b_2 = a_2 = L C$.

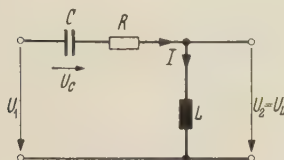


Bild 3. Beispiel.

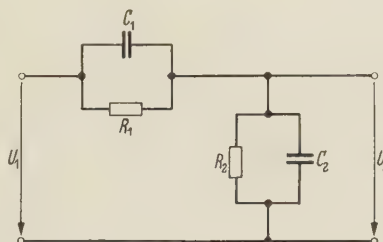


Bild 4. Beispiel.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Netz nach Bild 4. Die Differentialgleichung, die die Reaktion (Ausgangsgröße) $U_2(t)$ mit der Anregung (Eingangsgröße) $U_1(t)$ verknüpft, findet man zu

$$(C_1 + C_2) \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_2 = \frac{1}{R_1} U_1 + C_1 \frac{dU_1}{dt}. \quad (4.11)$$

Anstatt diese Gleichung in umständlicher Rechenarbeit herzustellen, bestimmt man nach den einfachen Rechenregeln für stationäre Sinusschwingungen die komplexe Übertragungsfunktion (3.12) des vorgelegten Spannungsteilers und erhält aus dieser sogleich nach (3.13) die Funktion

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s C_1 + \frac{1}{R_1}}{s (C_1 + C_2) + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}. \quad (4.12)$$

Hieraus sieht man, und ebenso aus (4.11), daß das System sprungfähig ist: es ist $m = n = 1$. Nicht aus der Differentialgleichung (4.11), jedoch aus der Funktion (4.12) des Bildbereiches erhält man nach dem ersten Grenzwertsatz aus (4.5) unmittelbar den Anfangswert (Sprungwert) der Ausgangsgröße zu

$$U_2(+0) = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad (4.13)$$

und nach (4.7) ist ihr Endwert

$$U_2(\infty) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.14)$$

5. Die Äquivalenz von Anfangswerten und Nadelimpulsen (Zacken)

Im Anschluß an (3.3) hatten wir daran erinnert, daß die Reaktion als $Y(t) = Y_i(t) + Y_h(t)$ stets zusammengesetzt werden kann aus der Reaktion $Y_i(t)$ auf eine in $t = 0$ einsetzende äußere Anregung bei verschwindenden Anfangswerten des Systemes und der Reaktion $Y_h(t)$ auf die in $t = 0$ vorhandenen Anfangswerte (Vergangenheitswerte) $Y(0), \dots, Y^{(n-1)}(0)$ der Reaktion des freien (in sich geschlossenen) Systemes bei verschwindender äußerer Anregung. Wir wenden uns hier diesem zweiten Anteil $Y_h(t)$ zu.

A. Wir wollen zunächst daran erinnern, daß $Y_h(t)$ nicht nur so verstanden werden kann, wie eben gesagt wurde, sondern ebenso gut auch als die Reaktion des völlig in Ruhe befindlichen Systemes auf in $t = 0$ einsetzende Nadelimpulse.

Wir schreiben im folgenden: die Sprungfunktion $\eta(t)$; sie ist erklärt durch $\eta(t) = 0$ für $t < 0$ und $\eta(t) = 1$ für $t > 0$, ferner den einfachen Nadelimpuls $\eta' = \frac{d\eta}{dt}$, den zweifachen Nadelimpuls (Doppelstoß) $\eta'' = \frac{d^2\eta}{dt^2}$, und so weiter: (5.1). Diese Ausdrucksweise wird im folgenden 6. Abschnitt begründet werden.

Man sieht das Wesentliche, wenn man sich in einem Beispiel auf die Ordnungszahl $n = 3$ beschränkt. Es handelt sich also um die Lösung $Y_h(t)$ der Aufgabe

$$\left. \begin{aligned} a_3 Y''' + a_2 Y'' + a_1 Y' + a_0 Y &= 0, \\ Y''(0), \quad Y'(0), \quad Y(0) &\text{ gegeben.} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Nach (3.3) ist die Bildfunktion

$$y_h(s) = \frac{P_2}{N_3(s)} \quad (5.3)$$

mit $N_3(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$. Wie in (3.6) erwähnt wurde, ist

$$P_2 = \{a_3 s^2 + a_2 s + a_1\} Y(0) + \{a_3 s + a_2\} Y'(0) + a_3 Y''(0). \quad (5.4)$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen der Variablen s , so wird

$$y_h(s) = \frac{k_0 + k_1 s + k_2 s^2}{N_3(s)}; \quad (5.5)$$

die Faktoren

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= a_1 Y(0) + a_2 Y'(0) + a_3 Y''(0), \\ k_1 &= a_2 Y(0) + a_3 Y'(0), \\ k_2 &= a_3 Y(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

sind durch die Konstanten des Systemes und durch die Anfangswerte bestimmt. Nun sind aber im Zähler von (5.5) die Potenzen $1, s, s^2$ die Transformierten des Nadelimpulses η' , des zweifachen Nadelimpulses η'' und des dreifachen Nadelimpulses η''' . Aus (5.5) liest man daher ab: $y_h(s)$ ist nicht nur das Bild der Lösung $Y_h(t)$ der Aufgabe, von der wir mit (5.2) ausgegangen sind, sondern zugleich auch das Bild der Lösung $Z(t)$ der Aufgabe

$$\left. \begin{aligned} a_3 Z''' + a_2 Z'' + a_1 Z' + a_0 Z &= k_0 \eta' + k_1 \eta'' + k_2 \eta''', \\ Z''(0) = Z'(0) = Z(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Die Reaktion des freien (in sich geschlossenen) Systemes auf Vergangenheitswerte kann man demnach auch verstehen und berechnen als die Reaktion auf einfache und mehrfache Nadelimpulse (einfache und höhere Stoßfunktionen) bei verschwindenden Anfangswerten. Es ist nicht selbstverständlich, daß es gerade die Nadelimpulse (Stoßfunktionen) sind, durch die die Anfangswerte ersetzt werden können (die Sprungfunktion zum Beispiel ist an dem Ersatz nicht beteiligt), und auch die Gewichte k_i (5.6), mit denen sie eingehen, sind nicht evident.

Die Aussagen können, wie man leicht sieht, verallgemeinert für eine beliebige Ordnungszahl n gemacht werden.

B. Man muß infolgedessen die Reaktion eines völlig in Ruhe befindlichen Systemes auf Nadelimpulse als Störfunktionen auch darstellen können als die Reaktion des freien (in sich geschlossenen) Systemes auf von null verschiedene Anfangswerte (Vergangenheitswerte). Hier findet man aber, daß dieser Ersatz auf besondere Fälle beschränkt ist, während der umgekehrte Ersatz (A) allgemein durchführbar ist.

Die folgenden Beispiele zeigen die Möglichkeiten für Systeme erster, zweiter und dritter Ordnung und den Nadelimpuls $J_1 \cdot \eta'$, den Doppelnadelimpuls $J_2 \cdot \eta''$ und den Dreifachnadelimpuls $J_3 \cdot \eta'''$.

1. Bei dem System erster Ordnung

$$a_1 Y' + a_0 Y = \Psi(t) \quad (5.8)$$

ist es offenbar dasselbe, ob man sagt, der Vorgang $Y(t)$ des freien (abgeschlossenen, sich selbst überlassenen) Systemes werde durch einen von null verschiedenen Anfangswert $Y(0)$ bewirkt, oder ob man sagt, der Vorgang $Y(t)$ werde durch einen Nadelimpuls hervorgerufen, der auf das völlig in Ruhe befindliche System wirkt. Nach der ersten Vorstellung ist $\Psi(t) = 0$ und $Y(0) \neq 0$ für (5.8); die Bildfunktion wird

$$y(s) = \frac{a_1 Y(0)}{a_1 s + a_0}; \quad (5.9)$$

nach der zweiten Vorstellung ist $\Psi(t) = J_1 \eta'$ und $Y(0) = 0$ für (5.8), sodaß man die Bildfunktion erhält

$$y(s) = \frac{J_1}{a_1 s + a_0}; \quad (5.10)$$

die beiden Bildfunktionen und darum auch die Originale $Y(t)$ sind identisch, wenn zwischen Anfangswert und Impulsmoment die Beziehung besteht

$$Y(0) = \frac{J_1}{a_1}. \quad (5.11)$$

2. Regt man das System zweiter Ordnung

$$a_2 Y'' + a_1 Y' + a_0 Y = \Psi(t), \quad (5.12)$$

aus dem völlig entspannten Zustand heraus mit einem Nadelimpuls an:

$$Y'(0) = Y(0) = 0, \quad \Psi(t) = J_1 \eta', \quad (5.13)$$

so wird die Bildfunktion

$$y(s) = \frac{J_1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (5.14)$$

Man erhält dieselbe Bildfunktion für den Vorgang des freien Systemes: $\Psi(t) = 0$ mit den Anfangswerten

$$Y'(0) = \frac{J_1}{a_2}, \quad Y(0) = 0. \quad (5.15)$$

Gleichheit der Bilder bedeutet Gleichheit der Originale: bei schlagartiger Anregung des vorher in Ruhe befindlichen Systemes ist der Anfangswert der Auslenkung $Y(t)$ null, der Anfangswert der Geschwindigkeit $Y'(t)$ ist von null verschieden: das ist die Aussage von (5.15).

Dieser Sachverhalt ist unter anderem geläufig vom ballistischen Gebrauch des schwingungsfähigen Galvanometers her.

3. Regt man das System zweiter Ordnung

$$a_2 Y'' + a_1 Y' + a_0 Y = \Psi(t) \quad (5.16)$$

aus dem Zustand völliger Ruhe heraus mit einem Doppelnadelimpuls an:

$$Y'(0) = Y(0) = 0, \quad \Psi(t) = J_2 \eta'', \quad (5.17)$$

so wird die Bildfunktion

$$y(s) = \frac{J_2 s}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (5.18)$$

Überläßt man dieses System sich selbst: $\Psi(t) = 0$, so erhält man dieselbe Bildfunktion, also denselben Verlauf $Y(t)$, mit den Anfangswerten

$$Y(0) = \frac{J_2}{a_2}, \quad Y'(0) = 0. \quad (5.19)$$

Dieses Ergebnis konnte keineswegs mit derselben Sicherheit vermutet werden, wie die Aussagen des ersten und des zweiten Beispiels. Es ist auch weniger anschaulich.

4. Das System dritter Ordnung

$$a_3 Y''' + a_2 Y'' + a_1 Y' + a_0 Y = \Psi(t) \quad (5.20)$$

werde aus dem Zustand völliger Ruhe heraus durch einen Nadelimpuls erregt:

$$Y''(0) = Y'(0) = Y(0) = 0, \quad \Psi(t) = J_1 \eta'. \quad (5.21)$$

Dann wird die Bildfunktion

$$y(s) = \frac{J_1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}; \quad (5.22)$$

ist dieses System frei (sich selbst überlassen): $\Psi(t) = 0$, so wird mit den Anfangswerten

$$Y''(0) = \frac{J_1}{a_3}, \quad Y'(0) = Y(0) = 0 \quad (5.23)$$

die Bildfunktion dieselbe, und daher auch die Originalfunktion $Y(t)$. Für dieses System bedeutet also der Nadelimpuls dasselbe, wie ein von Null verschiedener Anfangswert der Beschleunigung $Y''(t)$.

5. Auf das System dritter Ordnung

$$a_3 Y''' + a_1 Y' + a_0 Y = \Psi(t), \quad (5.24)$$

wirke aus dem Zustand völliger Ruhe heraus ein Doppelnadelimpuls:

$$Y'''(0) = Y'(0) = Y(0) = 0, \quad \Psi(t) = J_2 \eta''. \quad (5.25)$$

Man erhält die Bildgleichung

$$y(s) = \frac{J_2 s}{a_3 s^3 + a_1 s + a_0}. \quad (5.26)$$

Das freie (sich selbst überlassene) System: $\Psi(t) = 0$ hat dieselbe Bildfunktion, daher dasselbe Original $Y(t)$, bei den Anfangswerten

$$Y'(0) = \frac{J_2}{a_3}, \quad Y''(0) = Y(0) = 0. \quad (5.27)$$

6. Auf das System dritter Ordnung

$$a_3 Y''' + a_0 Y = \Psi(t) \quad (5.28)$$

wirke aus dem Zustand völliger Ruhe heraus ein Dreifachnadelimpuls:

$$Y'''(0) = Y'(0) = Y(0) = 0, \quad \Psi(t) = J_3 \eta'''. \quad (5.29)$$

Die Bildfunktion wird dann

$$y(s) = \frac{J_3 s^2}{a_3 s^3 + a_0}; \quad (5.30)$$

dieselbe Bildfunktion, und daher dasselbe Original $Y(t)$, erhält man für dieses System, wenn es sich selbst überlassen ist: $\Psi(t) = 0$, und die Anfangswerte hat

$$Y(0) = \frac{J_3}{a_3}, \quad Y''(0) = Y'(0) = 0. \quad (5.31)$$

Auf die Frage der Realisierung der Systeme, die wir in den Beispielen genannt haben, wollen wir hier nicht eingehen.

Die Beispiele zeigen also, daß nur in besonderen Fällen die Wirkung eines Nadelimpulses auf ein in Ruhe befindliches System identisch ist mit der Wirkung eines gewissen Anfangswertes auf dasselbe System. Zum Beispiel ist es bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung (5.12) nicht möglich, einen Anfangswert anzugeben, der der Anregung durch einen Doppel-nadelimpuls entspräche, ebenso nicht bei der Differentialgleichung (5.20) dritter Ordnung. Dieser Sachverhalt weist hin auf einen entscheidenden Vorteil des Rechnens mit unstetigen Funktionen als Anregungsgrößen (Störfunktionen), insbesondere in komplizierteren Fällen: Man erfaßt mit ihm viel mehr Möglichkeiten, als wenn man von der Anregung eines freien (in sich geschlossenen) Systemes durch vorgegebene Anfangswerte (Vergangenheitswerte) ausgeht. Treten als eine Folge der Anregung unstetige Anfangswerte auf, so müssen diese nicht etwa vorausgesetzt werden, sie können vielmehr in jedem Falle durch die Rechnung erhalten werden.

6. Sprung und Nadelimpulse (Zacken) als mathematische Funktionen und als physikalische Größen

Man definiert die Sprungfunktion durch $\eta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\eta(x) = 1$ für $x > 0$, sodaß sie also zum Beispiel geschrieben werden kann $\eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x$, ferner den einfachen Nadelimpuls $\delta(x)$ als Grenzwert eines einmaligen Impulses bei unbegrenzt abnehmendem x , wenn das Impulsmoment auch in der Grenze als $\int_0^x \delta(\tau) d\tau = 1$ erhalten bleibt ($x > 0$). Hiernach ist $\delta(x)$ nicht eine Funktion der Variablen x im gewöhnlichen Sinne, man bezeichnet $\delta(x)$ wohl am besten als Pseudofunktion. Trotzdem kann man mit gewissen mathematischen Vorbehalten $\delta(x)$ als Ableitung der Sprungfunktion $\eta(x)$ ansehen, so, wie wenn $\delta(x)$ eine stetige Funktion wäre:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \eta(x). \quad (6.1)$$

Die Transformierte im Bildraum ist

$$\mathfrak{L}\{\delta(x)\} = 1. \quad (6.2)$$

In dem gleichen Sinne kann man den Doppel-Nadelimpuls $\delta'(x)$ als Ableitung von $\delta(x)$, den Dreifach-Nadelimpuls $\delta''(x)$ als Ableitung von $\delta'(x)$ ansehen, und so weiter:

$$\left. \begin{aligned} \delta'(x) &= \frac{d}{dx} \delta(x) = \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \eta'', \\ \delta''(x) &= \frac{d}{dx} \delta'(x) = \frac{d^3 \eta}{dx^3} = \eta''', \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Die Bilder sind

$$\mathfrak{L}\{\delta'(x)\} = s, \quad \mathfrak{L}\{\delta''(x)\} = s^2, \quad \mathfrak{L}\{\delta^{(n)}(x)\} = s^n. \quad (6.4)^{11}$$

Über die mathematische Fundierung findet man alles Wissenswerte bei G. DOETSCH¹². Auf die Transformationsregeln (6.2,4), die formal von der Regel (1.2,3) abweichen, sei aufmerksam gemacht.

¹¹ Von diesen Beziehungen haben wir in (5.5) und (5.7) Gebrauch gemacht.

¹² G. DOETSCH, Anleitung ... S. 49—51 und 55, Einführung ... S. 100 bis 103.

In der hier gegebenen Zusammenstellung (6.1,2,3,4) hat das Formelzeichen x natürlich die Bedeutung einer reinen (unbenannten) Zahl. Bei der Herleitung des einfachen Nadelimpulses geht man aber fast immer aus von den physikalischen Größen: Zeitdauer t eines einmaligen Impulses (die unendlich klein wird) und Impulsstärke oder Impulsmoment J_1 (das auch in der Grenze konstant bleibt). Ein Rechteckimpuls von der Zeitdauer ε hat dann die Höhe J_1/ε , aber nicht $1/\varepsilon$, wie meist angegeben wird, und die mathematische Funktion $\delta(t)$ wird erhalten, indem man den Grenzwert des physikalischen Impulses für $\varepsilon \rightarrow 0$ durch J_1 dividiert, denn J_1 kennzeichnet die physikalische Art des Impulses und den speziellen Wert des Impulsmomentes: J_1 ist die physikalische Größe, $\delta(t)$ ist die mathematische Funktion. Man kann schreiben $J(t) = J_1 \cdot \delta(t)$ für den physikalischen Impuls. Ebenso kennzeichnet S_0 in $S(t) = S_0 \cdot \eta(t)$ die physikalische Art der Größe, die springt, und den speziellen Wert des Sprunges: S_0 ist die physikalische Größe, $\eta(t)$ ist die mathematische Funktion. Schreibt man Gleichungen nicht für mathematische Funktionen, sondern für physikalische Größen, so sind der Sprung S_0 , das Impulsmoment J_1 und die Momente J_2, J_3, \dots der mehrfachen Impulse als physikalische Größen unentbehrlich. Die mathematischen Darstellungen verzichten leider häufig darauf, diese physikalischen Größen in den Gleichungen explizit anzuführen. Dies kommt daher, daß ganz allgemein in rein mathematischen Darstellungen oft kein Wert darauf gelegt wird, die Gleichungen so zu formulieren, daß sie unmittelbar und ohne Ergänzungen als Gleichungen zwischen physikalischen Größen verstanden werden können, obwohl doch letzten Endes der mathematische Apparat zu dem Zweck dargeboten wird, physikalische Vorgänge zu beschreiben¹³. Die vorangegangenen Abschnitte, unter ihnen besonders der fünfte, haben gezeigt, daß für eine vollständige Darstellung physikalischer Sachverhalte die Größen S_0, J_1, J_2, \dots in der Tat unentbehrlich sind.

Leider ist es nun für eine einwandfreie Darstellung nicht damit getan, daß man die physikalischen Größen S_0, J_1, J_2, \dots einfach an passende Stellen als Faktoren in die Gleichungen hineinschreibt. In der überwiegenden Mehrzahl der Gleichungen, in denen auch die Sprungfunktion und einfache und mehrfache Nadelimpulse vorkommen, wird für die Variable das Formelzeichen t geschrieben und dieses wird als die physikalische Größe Zeit verstanden. Man spricht zum Beispiel von Ableitungen „nach der Zeit“. Auf die Auslegung des Formelzeichens t als die physikalische Größe Zeit wird man hier nicht verzichten; man hat auch auf anderen weiten Gebieten der Mathematik (nicht nur der Physik und der Technik) auf diese Auslegung nicht verzichtet (zum Beispiel bedeutet in dem Ausdruck $\sin \omega t$ für die harmonische Schwingung das Zeichen t nicht eine reine Zahl, sondern die Zeit, anders nämlich wäre das Zeichen ω überflüssig).

Ist nun die Sprungfunktion $\eta(t)$ als mathematische Funktion eine reine (unbenannte) Zahl — und davon wird man zweckmäßig auszugehen haben, —, so sind die Beziehungen

$$\delta(t) = \frac{d\eta}{dt}, \quad \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt = 1 \quad (\text{für } t > 0), \quad (6.5)$$

nur dann hinsichtlich der physikalischen Dimensionen in Ordnung, wenn $\delta(t)$ eine physikalische Größe ist, nicht etwa eine reine (unbenannte) Zahl; sie muß in einer physikalischen Einheit angegeben werden, und zwar in der Einheit $[t]^{-1}$, wenn $[t]$ die Einheit der Zeit t ist¹⁴.

¹³ In dem erwähnten Buch⁵ von K. W. WAGNER sind die Gleichungen größtenteils so geschrieben, daß die Formelzeichen als physikalische Größen verstanden werden können. Die WAGNERSche Transformation

$$\Re\{F(t)\} = s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \varphi(s)$$

hat die große Annehmlichkeit, daß jede Bildgröße $\varphi(s)$ die gleiche physikalische Dimension hat, wie ihre Originalgröße $F(t)$. Das ist bei der LAPLACESchen Transformation nach (1.1) nicht der Fall. Eine Gegenüberstellung einiger Eigenschaften der LAPLACESchen und der WAGNERSchen Transformation bei K. W. WAGNER, Arch. f. Elektrotechn. 35 (1941) S. 502 bis 506.

¹⁴ Man würde gegen die einfachsten Regeln verständlicher Darstellung verstoßen, wenn man in demselben Zusammenhang demselben Formelzeichen t bald die Bedeutung der reinen Zahl, bald die Bedeutung der physikalischen Größe Zeit geben würde.

Entsprechendes gilt für die mehrfachen Nadelimpulse: Der doppelte Nadelimpuls $\delta'(t)$ ist eine physikalische Größe, die in der Einheit $[t]^{-2}$ angegeben wird, und so weiter.

Nun halten wir es für eine gänzlich überflüssige Belastung des Gedächtnisses, daß man sich zugleich mit den Symbolen der Stoßfunktion $\eta(t)$ und der Nadelimpulse $\delta(t)$, $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, ... die unterschiedlichen physikalischen Dimensionen merken solle. Wir haben daher in den vorangegangenen Abschnitten eine andere Symbolik benutzt, in der die physikalischen Dimensionen evident sind, wenn t die Zeit bedeutet: ausgehend von der Sprungfunktion $\eta(t)$ als reiner (unbenannter) Zahl haben wir den Nadelimpuls nicht $\delta(t)$ geschrieben, sondern $\frac{d\eta}{dt} = \eta'$, den doppelten Nadelimpuls nicht $\delta'(t)$, sondern $\frac{d^2\eta}{dt^2} = \eta''$, und so weiter¹⁵, denn die Symbole η' , η'' , und so weiter für Ableitungen sind eingeführt und unmißverständlich, und ebenso ist es geläufig, daß Ableitungen nach der Zeit physikalische Größen sind.

Man kann natürlich Dimensionsfragen immer dadurch zum Verschwinden bringen, daß man Bezugsgrößen einführt und mit diesen wegdividiert. Aber es sollte doch in jedem einzelnen Falle sorgfältig geprüft werden, ob man mit einer solchen Verschlüsselung dem Benutzer der Gleichungen eine Erleichterung oder eine Erschwerung bietet.

Herrn Prof. Dr. G. DOETSCH, Freiburg (Brg.) danke ich hier gerne für eine anregende schriftliche Diskussion, die mich insbesondere hingewiesen hat auf das von ihm angegebene Kriterium dafür, wann bei springender Anregungsgröße die Reaktion eines linearen Systemes springt und wann nicht, vergl. Abschnitt 2. C); auch die Gln. (4.2), (3), (3a) finden sich bei DOETSCH a. a. O.

Prof. Dr.-Ing. J. FISCHER, Technische Hochschule Karlsruhe.

¹⁵ In der Schreibweise $\int_{-\infty}^t \frac{d\eta}{dt} dt = 1$ ist die Dimensionsrichtigkeit evident, in der Schreibweise $\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1$ ist sie das nicht.

Die Zurückführung unsymmetrischer Vierpole zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen auf symmetrische Vierpole

Von

W. HERZOG

(Mitteilung aus dem Institut für Elektrotechnik der Universität Mainz)

Mit 23 Abbildungen

(Eingegangen am 15. Juni 1961)

Übersicht: Es wird die Bedingung angegeben, unter welcher unsymmetrische Vierpole zwischen ungleichen Abschlußwiderständen die gleiche Frequenzabhängigkeit der Betriebsdämpfung aufweisen wie der entsprechende symmetrisch aufgebaute Vierpol. Am Beispiel eines T - und eines II -Gliedes wird aus der symmetrischen Schaltung eine unsymmetrische mit dieser Eigenschaft hergeleitet. Halbiert man einen zwischen gleichen Abschlußwiderständen liegenden symmetrischen Vierpol und gibt Leerlauf- und Kernwiderstand einer Hälfte und dem dazugehörigen Abschlußwiderstand einen beliebigen reellen Faktor, so ist die Betriebsdämpfung bis auf einen reellen Faktor gleich der des symmetrischen Vierpols. Schaltet man zwei symmetrische Vierpole, von denen einer und der dazugehörige Abschlußwiderstand die Daten des anderen mit einem reellen Faktor multipliziert erhält, in Kette, so unterscheidet sich ihre Betriebsdämpfung von der zweier gleicher symmetrischer Vierpole in Kette nur um einen reellen Faktor.

1. Problemstellung

Symmetrische Filter haben den Vorteil, daß ihr Verhalten durch Umwandlung in eine Brückenschaltung einfach zu übersehen ist. Die Darstellung der Blindwiderstände der Brückenzweige bietet eine Übersicht über Durchlaß- und Sperrbereiche sowie über Null- und Polstellen. Soll ein Filter zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen R_1 und R_2 arbeiten, so kann man ein symmetrisches Filter mit einem Übertrager benutzen. Man kann natürlich auch ein symmetrisches Filter zwischen ungleiche Abschlußwiderstände schalten, doch ergeben sich hierbei Änderungen des Dämpfungs- und Phasenverlaufs gegenüber dem gleichen Filter mit gleichen Abschlußwiderständen und keine einfache Berechnung, falls sie überhaupt durchführbar ist.

Im vorliegenden Aufsatz soll das Filter unsymmetrisch angepaßt werden, wobei durch geeignete Umformung die Berechnung nach dem entsprechenden symmetrischen Filter erfolgen kann. Dadurch wird der Übertrager eingespart. Zu Filtern dieser Art gehören die früher beschriebenen unsymmetrisch angepaßten T - und II -Glieder [1, S. 273]. Wir gehen im folgenden von einem unsymmetrischen Vierpol aus und stellen die Bedingung auf unter der er sich wie der entsprechend aufgebaute symmetrische Vierpol betrachten und berechnen läßt (s. auch [2], [3]).

2. Die Umwandlung des unsymmetrischen Vierpols

Wir betrachten den in Bild 1 gezeigten verlustfreien unsymmetrischen Vierpol mit den Leerlaufwiderständen \underline{W}_{1l} und \underline{W}_{2l} und dem Kernwiderstand \underline{M} zwischen den Abschlußwiderständen R_1 und R_2 . \underline{U}_0 ist die Ursprungsspannung.

Für das Betriebsübertragungsmaß g dieser Anordnung gilt bekanntlich:

$$e^g = \frac{(R_1 + \underline{W}_{1l})(R_2 + \underline{W}_{2l}) - \underline{M}^2}{2\sqrt{R_1 R_2} \underline{M}}. \quad (1)$$

Die Betriebsdämpfung a berechnet sich hieraus mit den Formeln

$$\underline{W}_{1l} = j \underline{W}_{1l} \quad \underline{W}_{2l} = j \underline{W}_{2l} \quad \underline{M} = j \underline{M}, \quad (2)$$

zu

$$e^a = \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 + \frac{(\underline{W}_{1l} \underline{W}_{2l} - \underline{M}^2)^2 + R_1^2 (\underline{W}_{2l}^2 - \underline{M}^2) + R_2^2 (\underline{W}_{1l}^2 - \underline{M}^2) + R_1^2 R_2^2}{4 R_1 R_2 \underline{M}^2}}. \quad (3)$$

Hierbei haben wir eine für die weitere Betrachtung geeignete Form gewählt.

Die Bedingung, die zur Behandlung der unsymmetrischen Vierpole als symmetrische Vierpole erforderlich ist, lautet:

$$R_1 (W_{2l} - M) = R_2 (W_{1l} - M). \quad (4)$$

Diese Bedingung ist natürlich theoretisch eine starke Einschränkung der möglichen Vierpole, praktisch jedoch eine geringe Einschränkung, da die damit aufbaubaren Vierpole die häufiger gebrauchten sind.

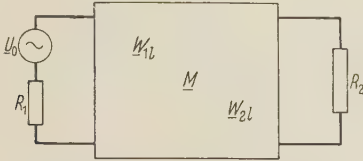


Bild 1. Unsymmetrischer Vierpol zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

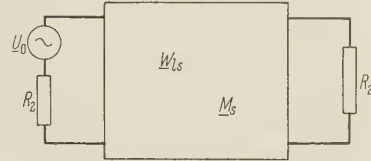


Bild 2. Symmetrischer Vierpol zwischen gleichen Abschlußwiderständen.

Mit der Bedingung (4) ergibt sich aus der Formel (3):

$$e^a = \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 + \left(\frac{(W_{1l} W_{2l} - M^2)(W_{2l} - M) + R_2^2 (W_{1l} - M)^2}{2\sqrt{R_1 R_2} M (W_{2l} - M)}\right)^2} \quad (5)$$

Da normalerweise die Abschlußwiderstände R_1 und R_2 gegeben sind, so wollen wir deren Verhältnis α einführen. Wir zerlegen damit die Bedingung (4) in die beiden Bedingungen:

$$R_1 = \alpha R_2 \quad W_{1l} - M = \alpha (W_{2l} - M). \quad (6)$$

Obwohl in der zweiten Gl. (6) der Kernwiderstand M vorkommt, wird derselbe nicht durch diese Bedingung berührt. Um Unklarheiten zu vermeiden, führen wir daher die folgenden Abkürzungen, die den negativen Schwingwiderständen entsprechen, ein:

$$W_{1l} - M = W_1 \quad W_{2l} - M = W_2. \quad (7)$$

Damit wird die zweite Gl. (6):

$$W_1 = \alpha W_2. \quad (8)$$

Mit der weiteren Abkürzung

$$M \frac{1 + \alpha}{2\alpha} = \bar{M} \quad (9)$$

erhalten wir durch einfache Umformungen aus Gl. (5):

$$e^a = \frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \left[\frac{W_2 \left(W_2 + \frac{2\bar{M}}{R_2} \right) + 1}{\frac{2\bar{M}}{R_2}} \right]^2}. \quad (10)$$

Setzen wir

$$W_2 + \frac{2\bar{M}}{R_2} = X_2 \quad W_2 = X_1, \quad (11)$$

so erhalten wir, abgesehen von dem eine Grunddämpfung verursachenden Faktor, die Formel für die Betriebsdämpfung einer Brückenschaltung:

$$e^a = \frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{X_1 X_2}{R_2^2} + 1}{\frac{X_2}{R_2} - \frac{X_1}{R_2}} \right)^2}. \quad (12)$$

Für den entsprechend aufgebauten symmetrischen Vierpol (s. Bild 2) zwischen den Abschlußwiderständen R_2 mit dem Leerlaufwiderstand W_{1s} und dem Kernwiderstand M_s ergibt sich mit der Abkürzung

$$W_s = W_{1s} - M_s, \quad (13)$$

aus den Gln. (9) und (10) für $\alpha = 1$

$$e^a = \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{W_s}{R_2} \left(\frac{W_s}{R_2} + \frac{2 M_s}{R_2} \right) + 1}{\frac{2 M_s}{R_2}} \right]^2}, \quad (14)$$

mit der den Gln. (11) entsprechenden Möglichkeit der Umwandlung in die allgemeine Brückenformel.

Der Unterschied zwischen unterstrichenen und nichtunterstrichenen Größen entspricht allgemein dem der Gln. (2). Unterstreichungen bedeutet also lediglich Multiplikation mit dem Faktor j .

Die entsprechenden Formeln für Bezugnahme auf R_1 können in gleicher Weise aufgestellt werden. Es genügt jedoch eine Berechnung.

Der Vergleich der Formeln (10) und (14) sowie der Bilder 1 und 2 zeigt, daß der unsymmetrische Vierpol in gleicher Weise wie der symmetrische Vierpol berechnet wird. Liegt die Berechnung des symmetrischen Vierpols für einen beliebigen Filterzweck vor, so ist der Aufbau des unsymmetrischen Vierpols nach Bild 1 so vorzunehmen, daß der W_2 entsprechende Schaltteil W_s direkt zu übernehmen ist:

$$W_2 = W_{2l} - M = W_s. \quad (15)$$

Nach Gl. (8) erhält man

$$W_1 = W_{1l} - M = \alpha W_2 = \alpha W_s \quad (16)$$

und schließlich nach Gl. (9)

$$M = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \overline{M} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} M_s. \quad (17)$$

Die in Formel (10) auftretende Grunddämpfung a_0

$$e^{a_0} = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \quad (18)$$

ist im allgemeinen klein. Ein Wert $\alpha = 10$ oder $\alpha = 1/10$ liefert eine Grunddämpfung $a_0 = 0,55$ Neper.

3. Das unsymmetrische T-Glied

Besonders anschaulich für das behandelte Problem ist das T-Glied. In Bild 3 zeigen wir das aufzubauende unsymmetrische T-Glied und in Bild 4 das zur Berechnung desselben dienende symmetrische T-Glied. Man sieht leicht aus den beiden Abbildungen die Realisierung der Gln. (15) bis (17).

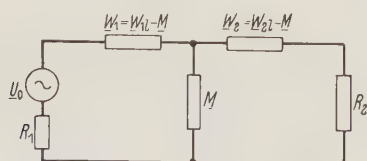


Bild 3. Unsymmetrisches T-Glied zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

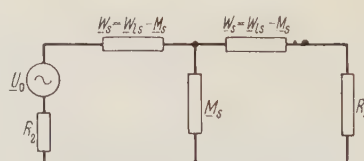


Bild 4. Symmetrisches T-Glied zwischen gleichen Abschlußwiderständen.

Als Beispiel wählen wir den in Bild 5 gezeigten Tiefpaß. Gegeben sind R_1 , R_2 und die Grenzfrequenz f_2 ($\omega_2 = 2\pi f_2$). Zur Berechnung wenden wir uns zu der symmetrischen Anordnung wie sie Bild 6 wiedergibt. Nach dem Satz von BARTLETT erhalten wir aus Bild 6 die in Bild 7 dargestellten Brückenweige mit den Blindwiderständen X_1 und X_2 . Es ist:

$$W_s = \omega L_s \quad M_s = -\frac{1}{2\omega C_s}. \quad (19)$$

Die Darstellung des Blindwiderstandsverlaufs X der Brückenzweige X_1 und X_2 in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω zeigen wir in Bild 8. Der Sperrbereich ist schraffiert eingezeichnet. Wie man leicht sieht, ist ein Dämpfungspol nicht möglich.

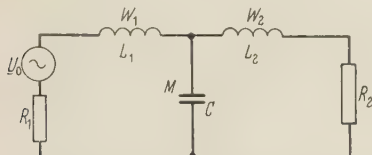


Bild 5. Unsymmetrisch aufgebauter Tiefpaß zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

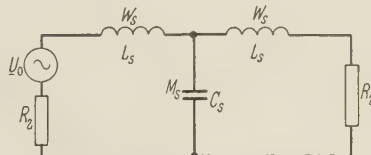


Bild 6. Symmetrischer Tiefpaß zwischen gleichen Abschlußwiderständen.

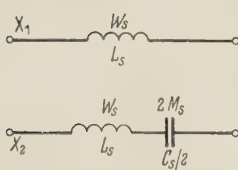


Bild 7. Brückenzweige aus dem Tiefpaß Bild 6.

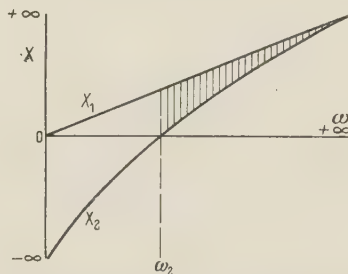


Bild 8. Verlauf der Blindwiderstände der Brückenzweige Bild 7 in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

Die Gleichungen der Blindwiderstände der Brückenzweige sind:

$$X_1 = \omega L_s \quad X_2 = \omega L_s - \frac{2}{\omega C_s} = \omega L_s \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2}. \quad (20)$$

Eine der gesuchten Gleichungen zur Bestimmung der beiden Schaltelemente ist:

$$\omega_2^2 = \frac{2}{L_s C_s}. \quad (21)$$

Zur Ermittlung der zweiten Gleichung bilden wir die Formel für den Wellenwiderstand Z :

$$Z^2 = -X_1 X_2 = (\omega_2^2 - \omega^2) L_s^2. \quad (22)$$

Legen wir die Frequenz im Durchlaßbereich, bei welcher der Betrag des Wellenwiderstandes mit dem Abschlußwiderstand R_2 zusammenfallen soll, auf den Wert ω_r , so wird aus Gl. (22):

$$R_2^2 = (\omega_2^2 - \omega_r^2) L_s^2. \quad (23)$$

Aus den Gln. (21) und (23) folgen die gesuchten Filtergrößen des symmetrischen Filters zu:

$$L_s = \frac{R_2}{\sqrt{\omega_r^2 - \omega_2^2}}, \quad (24)$$

$$C_s = \frac{2 \sqrt{\omega_2^2 - \omega_r^2}}{\omega_2^2 R_2}. \quad (25)$$

Für das aufzubauende unsymmetrische Filter ergeben sich nach den Gln. (15) bis (17) die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= L_s, \\ L_1 &= \alpha L_s, \\ C &= \frac{1 + \alpha}{2 \alpha} C_s. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Der Betriebsdämpfungsverlauf ist, abgesehen von α_0 , völlig identisch mit dem des symmetrischen Filters.

Die Gln. (15) bis (17) wandeln beliebige symmetrische Filterschaltungen in unsymmetrische Schaltungen um.

Das unsymmetrische II -Glied

In Bild 9 zeigen wir eine unsymmetrische II -Schaltung. Die entsprechende symmetrische Schaltung finden wir in Bild 10.

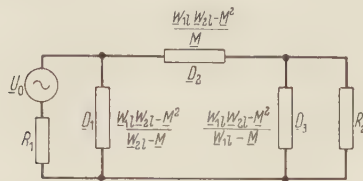


Bild 9. Unsymmetrisches II -Glied zwischen verschiedenen Abschlusswiderständen.

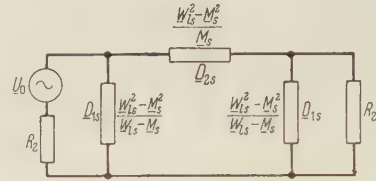


Bild 10. Symmetrisches II -Glied zwischen gleichen Abschlusswiderständen.

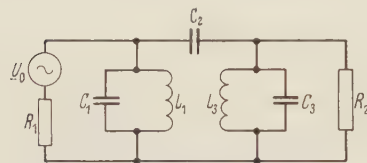


Bild 11. Unsymmetrisch aufgebautes Bandfilter mit verschiedenen Abschlusswiderständen.

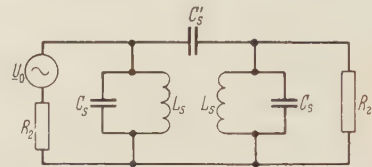


Bild 12. Symmetrisch aufgebautes Bandfilter mit gleichen Abschlusswiderständen.

Wir beziehen uns wieder auf das bei R_2 liegende Glied und setzen (entsprechend dem T -Glied):

$$D_3 = D_{1s}. \quad (27)$$

Mit der Bedingung (6) entnehmen wir Bild 9:

$$D_1 = \alpha D_3. \quad (28)$$

Nun fehlt uns noch eine Gleichung für D_2 . Den Bildern 9 und 10 entnehmen wir:

$$D_2 = \frac{W_{1l} W_{2l} - M^2}{M}, \quad (29)$$

$$D_{2s} = \frac{W_{ls}^2 - M_s^2}{M_s}. \quad (30)$$

Aus Gl. (27) erhalten wir:

$$\frac{W_{1l} W_{2l} - M^2}{W_{1l} - M} = \frac{W_{ls}^2 - M_s^2}{W_{ls} - M_s} = W_{ls} + M_s. \quad (31)$$

Mit einer einfachen Umformung und Gl. (6) ergibt sich:

$$\frac{(W_{1l} - M) W_{2l} + M (W_{2l} - M)}{W_{1l} - M} = \frac{\alpha W_{2l} + M}{\alpha} = W_{ls} + M_s. \quad (32)$$

Eine ähnliche Umformung ändert D_2 (Gl. (29)) mit Hilfe der Gln. (32) und (9) bzw. (17) in:

$$D_2 = \frac{(W_{2l} - M) (\alpha W_{2l} + M)}{M} = \frac{\left(W_{2l} + \frac{M}{\alpha} - \frac{M}{\alpha} - M\right) (\alpha W_{2l} + M)}{M} = \frac{1 + \alpha}{2} \cdot \frac{W_{ls}^2 - M_s^2}{M_s} = \frac{1 + \alpha}{2} D_{2s}. \quad (33)$$

Man kann noch die weiteren Beziehungen zeigen:

$$W_{2l} - M = W_{ls} - M_s \quad W_{1l} W_{2l} - M^2 = \alpha (W_{ls}^2 - M_s^2). \quad (34)$$

Als Beispiel wählen wir das in Bild 11 gezeigte Bandfilter.

Der Berechnung wird das entsprechende symmetrische Bandfilter zugrunde gelegt, das in Bild 12 dargestellt ist. Die aus Bild 12 abzuleitenden Brückenzeige sind in Bild 13 wiedergegeben und ihr Blindwiderstandsverlauf in Bild 14 (die Sperrbereiche sind schraffiert gezeichnet). Gegeben sind die Grenzfrequenzen f_1 und f_2 des Durchlaßbereiches und die Abschlußwiderstände R_1 und R_2 .

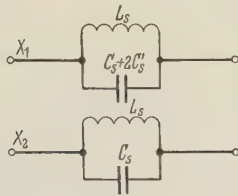


Bild 13. Brückenzeige aus dem Bandfilter Bild 12.

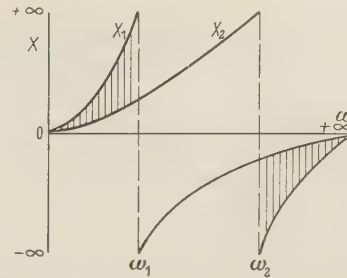


Bild 14. Verlauf der Blindwiderstände der Brückenzeige Bild 13 in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

Nach Bild 13 lauten die Formeln für die Blindwiderstände der Brückenzeige ($\omega = 2 \pi f$, $\omega_1 = 2 \pi f_1$, $\omega_2 = 2 \pi f_2$):

$$X_1 = -\frac{1}{\omega (C_s + 2 C'_s)} \cdot \frac{f^2}{f^2 - f_1^2}, \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C_s} \cdot \frac{1}{f^2 - f_2^2}, \quad (35)$$

mit den Gleichungen

$$L_s (C_s + 2 C'_s) = \frac{1}{4 \pi^2 f_1^2}, \quad (36)$$

$$L_s C_s = \frac{1}{4 \pi^2 f_2^2}. \quad (37)$$

Wir vereinfachen mit den Abkürzungen [1]:

$$f_1^2 = f_0^2 \left(1 - \frac{2 \delta}{f_0}\right), \quad f_2^2 = f_0^2 \left(1 + \frac{2 \delta}{f_0}\right), \quad f^2 = f_0^2 \left(1 + \frac{2 x}{f_0}\right) \quad (38)$$

und

$$\frac{x}{\delta} = z. \quad (39)$$

Damit ändern sich die Formeln (35) in:

$$X_1 = -\frac{1}{\omega (C_s + 2 C'_s)} \cdot \frac{f_0}{2 \delta} \cdot \frac{1}{z + 1}, \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C_s} \cdot \frac{f_0}{2 \delta} \cdot \frac{1}{z - 1}. \quad (40)$$

Für den Wellenwiderstand \underline{Z} ergibt sich:

$$\underline{Z}^2 = -X_1 X_2 = \frac{1}{\omega^2 C_s (C_s + 2 C'_s)} \cdot \left(\frac{f_0}{2 \delta}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - z^2}. \quad (41)$$

Legen wir den Abschlußwiderstand R_2 auf den Wellenwiderstand im Filtermittelpunkt ($z = 0$), so ist:

$$\underline{Z}_{z=0}^2 = R_2^2 = \frac{1}{4 \pi^2 C_s (C_s + 2 C'_s)} \cdot \frac{1}{4 \delta^2}. \quad (42)$$

Die Gln. (36), (37) und (42) liefern die Schaltelemente zu:

$$C_s = \frac{1}{4 \pi \delta R_2}, \quad (43)$$

$$C'_s = \frac{1}{2 \pi f_0 R_2}, \quad (44)$$

$$L_s = \frac{\delta R_2}{\pi f_0^2}. \quad (45)$$

Die Schaltelemente der unsymmetrischen *II*-Schaltung ergeben sich nach den Formeln (27), (28) und (33) mit den Gln. (43) bis (45) zu:

$$L_3 = L_s \quad C_3 = C_s \quad C_2 = \frac{2}{1+\alpha} C'_s \quad L_1 = \alpha L_s \quad C_1 = \frac{1}{\alpha} C_s. \quad (46)$$

5. Symmetrischer Vierpol und daraus abgeleiteter unsymmetrischer Vierpol mit frequenzgleicher Betriebsdämpfung

Wie wir den Ausführungen über *T*- und *II*-Glieder und auch Gl. (10) oder den Gln. (15) bis (17) direkt entnehmen können, lassen sich die gefundenen Ergebnisse auf einen beliebigen symmetrischen Vierpol anwenden. In Bild 15 zeigen wir einen symmetrischen Vierpol, der in der Mitte unterteilt ist und somit aus zwei spiegelbildlichen Hälften aufgebaut ist. Bild 16 hingegen bringt einen unsymmetrischen Vierpol, ebenfalls aus zwei Hälften bestehend, bei dem die rechte Hälfte der der Bild 16 entspricht. Bei der linken Hälfte sind Leerlauf- und Kernwiderstand mit dem Faktor α multipliziert, ebenso der linke Abschlußwiderstand. Beim *T*-Glieder (s. Bild 17) lassen sich die Gln. (15) bis (17) sofort ablesen.

Eine Erweiterung auf symmetrische Vierpole, wie sie die Symmetrietheoreme von BARTLETT und BRUNE enthalten, wird untersucht.

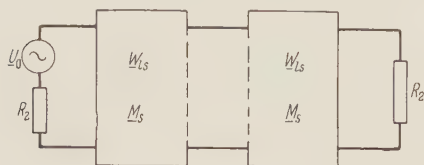


Bild 15. Halbierter symmetrischer Vierpol.

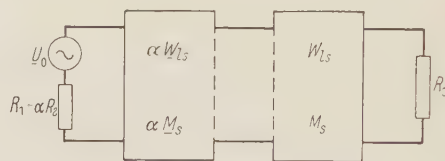


Bild 16. Unsymmetrischer Vierpol aus dem symmetrischen Vierpol Bild 15.

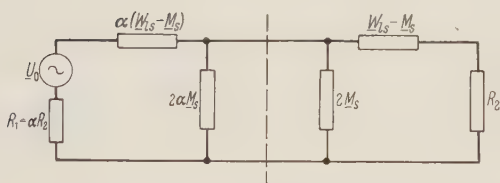


Bild 17. Unterteiltes unsymmetrisches *T*-Glieder.

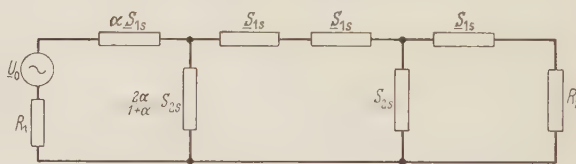


Bild 18. Kettenschaltung eines angepaßten und eines symmetrischen *T*-Glieder.

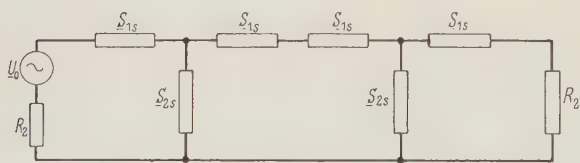


Bild 19. Kettenschaltung zweier symmetrischer *T*-Glieder.

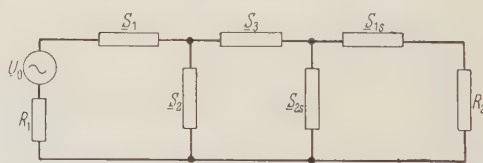


Bild 20. Zwei *T*-Glieder in Kette zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

6. Zwei *T*-Glieder in Kette

Will man zwischen den Abschlußwiderständen R_1 und R_2 *T*- oder *II*-Glieder in Kette schalten, so kann man das gefundene unsymmetrische Glied mit einem symmetrischen Glied für den Abschlußwiderstand R_2 in Kette zusammenfügen. In Bild 18 ist dieses für das *T*-Glieder ausgeführt. Man sieht leicht, daß die Bedingung (6) nicht erfüllt ist und damit das Betriebsdämpfungsverhalten nicht dem der Formel (10) entsprechen kann. Es entsteht also ein anderes Betriebsdämpfungsverhalten, das sich nicht aus dem der Einzelfilter ablesen läßt.

Wir wollen jedoch auch hier die Bedingung (6) und damit Gl. (10) beibehalten.

Die symmetrische Anordnung zeigen wir in Bild 19. Hiervon behalten wir die beiden rechten Glieder und suchen die in Bild 20 mit S_1 , S_2 und S_3 bezeichneten Glieder, die die Anpassung an R_1 vermitteln sollen. Zu ihrer Bestimmung dienen die drei den Gln. (15) bis (17) entsprechenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} W_{1l} - M &= \alpha (W_{ls} - M_s), \\ W_{2l} - M &= W_{ls} - M_s, \\ M &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} M_s. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Hierbei sind die mit dem Index s versehenen Größen der Widerstandsmatrix der symmetrischen Anordnung (Bild 19) zugeordnet, während die übrigen Größen die der Widerstandsmatrix der unsymmetrischen Anordnung (Bild 20) darstellen. Wie lesen aus den Bildern 19 und 20 leicht die folgenden Beziehungen ab:

$$W_{ls} - M_s = S_{1s} + \frac{S_{1s} S_{2s}}{S_{1s} + S_{2s}}, \quad (48)$$

$$M_s = \frac{S_{2s}^2}{2(S_{1s} + S_{2s})}, \quad (49)$$

$$W_{1l} - M = S_1 + \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3 + S_{2s}}, \quad (50)$$

$$M = \frac{S_2 S_{2s}}{S_2 + S_3 + S_{2s}}, \quad (51)$$

$$W_{2l} - M = S_{1s} + \frac{S_3 S_{2s}}{S_2 + S_3 + S_{2s}}. \quad (52)$$

Durch Einsetzen der Formeln (48) bis (52) in die Gln. (47) erhalten wir die gesuchten Größen zu:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \alpha S_{1s}, \\ S_2 &= \alpha S_{2s}, \\ S_3 &= (1 + \alpha) S_{1s} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

und damit das in Bild 21 gezeigte Schaltbild, das sich aus einem berechneten symmetrischen Einzelfilter sofort hinschreiben läßt. Das Beispiel in Abschn. 3 läßt sich also sofort auf zwei in Kette geschaltete T -Glieder erweitern.

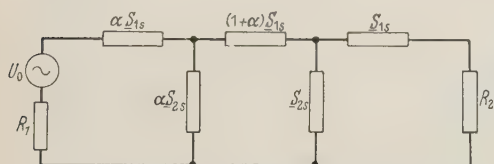


Bild 21. Zwei T -Glieder in Kette, angepaßt zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

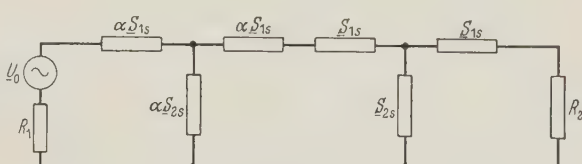


Bild 22. Umgezeichnetes Bild 21.

Zeichnen wir Bild 21 um, so erhalten wir das interessante Bild 22. Bild 22 besteht aus dem zugrunde gelegten symmetrischen T -Glieder und einem symmetrischen T -Glieder, das aus dem Grund- T -Glieder durch Multiplikation des Leerlauf- und des Kernwiderstandes mit der Größe α entstanden ist. Eine solche Anordnung wollen wir im folgenden allgemein untersuchen.

7. Anpassung durch zwei symmetrische Vierpole in Kette

Bild 23 zeigt die Bild 22 entsprechende Anordnung mit symmetrischen Vierpolen.

Für die beiden Vierpole in Kette erhält man die Größen der Widerstandsmatrix zu:

$$\overline{W}_{1l} = \frac{\alpha^2 (W_{1l}^2 - M^2) + \alpha W_{1l}^2}{(\alpha + 1) W_{1l}}, \quad (54)$$

$$\overline{M} = \frac{\alpha M^2}{(\alpha + 1) W_{1l}}, \quad (55)$$

$$\overline{W}_{2l} = \frac{W_{1l}^2 - M^2 + \alpha W_{1l}^2}{(\alpha + 1) W_{1l}}. \quad (56)$$

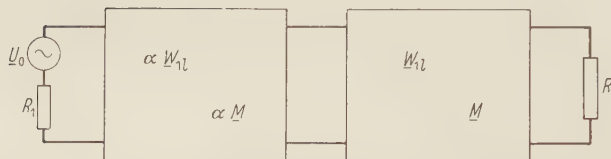


Bild 23. Zwei symmetrische Vierpole in Kette, angepaßt zwischen verschiedenen Abschlußwiderständen.

Man kann leicht zeigen, daß die Bedingung (6) erfüllt ist:

$$\overline{W}_{1l} - \overline{M} = \alpha (\overline{W}_{2l} - \overline{M}). \quad (57)$$

Durch Einsetzen der Größen (54) bis (56) in Gl. (3) erhalten wir für die Betriebsdämpfung:

$$e^a = \frac{1 + \alpha}{2 \sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \left[\frac{W_{1l} (W_{1l}^2 - M^2 + R_2^2)}{R_2 M^2} \right]^2}. \quad (58)$$

Für zwei symmetrische Vierpole in Kette zwischen den Abschlußwiderständen R_2 gilt:

$$e^{as} = \sqrt{1 + \left[\frac{W_{1l} (W_{1l}^2 - M^2 + R_2^2)}{R_2 M^2} \right]^2}, \quad (59)$$

so daß sich aus den Gln. (58) und (59) ergibt:

$$e^a = \frac{1 + \alpha}{2 \sqrt{\alpha}} \cdot e^{as} = e^{ao} \cdot e^{as}. \quad (60)$$

Die in Bild 23 wiedergegebene Kettenschaltung mit einem beliebigen symmetrischen Vierpol kann also zur Anpassung zwischen zwei Widerstände R_1 und R_2 dienen, wobei sich die Betriebsdämpfung bis auf einen Grunddämpfungsfaktor nicht von der von zwei in Kette geschalteten symmetrischen Vierpolen unterscheidet. Die Berechnung des symmetrischen Vierpols gibt gleichzeitig die Bemessung für die Kette.

Literatur

- [1] HERZOG, W.: Siebschaltungen mit Schwingkristallen. Braunschweig: Vieweg & Sohn, früher Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1949.
- [2] HERZOG, W.: Symmetrierte Vierpole, Arch. f. Elektrotechn. 46 (1961) Heft 6.
- [3] HERZOG, W.: Transformation of an Asymmetrical Four Terminal Network with Different Generator and Load Resistance into Symmetrical Network (im Druck).

Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. W. HERZOG, Universität Mainz, Institut für Elektrotechnik

Analyse eines klassischen Versuchs

Von

P. BÖNING, Hannover

(Eingegangen am 15. Juni 1961)

Übersicht: In einer Diskussion [1] über eine Experimentalarbeit von W. CRAMP und E. H. NORGROVE [2] stellte A. H. FINLAY folgende Frage: Ein hohler Metallzylinder, der einen gleichstromführenden geraden Leiter konzentrisch umgibt, werde in axialer Richtung bewegt (Bild 1). Dann wird in radialer Richtung zwischen Innen- und Außenmantel des Zylinders eine EMK induziert. Wie groß ist die EMK, wenn der Zylinder α) aus Kupfer, β) aus Eisen besteht? W. CRAMP äußerte in seiner Antwort die Ansicht, daß beim Eisenzylinder eine größere EMK zu erwarten sei als beim Kupferzylinder. Das Problem wurde von E. G. CULLWICK [3] aufgegriffen und experimentell gelöst. Es ergab sich, daß die EMK beim Eisen- und Kupferzylinder gleich groß ist, die Ansicht CRAMPS also nicht zutraf. Von diesem Ergebnis ausgehend seien einige Betrachtungen über das physikalische Verhalten dieser und ähnlicher Anordnungen angestellt.

Verschiedene Anordnungen

a) Bild 1 stellt die FINLAYSche Anordnung dar. Hierin ist A der zentrale gerade Leiter mit $I = \text{konst.}$, C der Hohlzylinder aus Metall im Schnitt (Wandstärke $l = r_1 - r_2$), D ein festliegender Meßkreis, dessen Enden a und b auf den Mänteln des Zylinders schleifen. Der Zylinder werde mit konstanter Geschwindigkeit v nach links bewegt.

b) Zylinder aus Kupfer. In diesem Fall sei die vom zentralen Leiterstrom in der Schnittfläche des Zylinders erzeugte mittlere magnetische Flußdichte B_0 . Bei der Bewegung des Zylinders zeigt der Spannungsmesser eine EMK $E = lv B_0$ an. Dies bedeutet, daß die radiale Kupferlänge l mit der Geschwindigkeit v den konzentrischen Fluß der Dichte B_0 schneidet, so daß in ihr die EMK E induziert wird. Eine transformatorisch induzierte EMK kommt nicht in Frage, weil der magnetische Fluß von der Quelle her zeitlich konstant ist ($I = \text{konst.}$, $d\Phi/dt = 0$).

c) Zylinder aus weichem Eisen. In diesem Fall ist die mittlere magnetische Flußdichte in der Schnittfläche des Zylinders $B = B_0 + B_i$, wobei B_0 die Komponente bedeutet, die wie unter b) vom zentralen Stromleiter erzeugt wird, und $B_i = (\mu - 1) B_0$ die (wesentlich größere!) Komponente ist, die zwar auch vom zentralen Stromleiter angeregt wurde, dann aber zu einer selbständigen Größe geworden ist, deren Quelle im Eisen liegt. Das Ergebnis der CULLWICKschen Versuchs, daß auch beim Eisenzylinder $E = lv B_0$ (und nicht $= lv B$) ist, kann einfach und sinnvoll so gedeutet werden, daß sich die Komponente B_i mit ihrer Quelle (l) bewegt und nicht zum Schnitt mit ihr kommt. Der Versuch zeigt anschaulich, daß die Komponenten des magnetischen Flusses im Eisenkern (entsprechend B_0 und B_i) zwei verschiedene Träger haben: die Komponente (B_0) ist mit dem zentralen Stromleiter, die Komponente (B_i) dagegen mit der Materie des Eisens verbunden (s. später).

d) Wenn der Hohlzylinder ruht, der zentrale Stromleiter sich jedoch axial mit der Geschwindigkeit v bewegt, so wird im Meßkreis keine EMK gemessen. In diesem Fall bewegt sich nur die Komponente B_0 , während die Komponente B_i (im Eisen) ruht, so daß bei $a-b$ im Eisen und in der Seite $c-d$ gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete EMKe $\pm E = lv B_0$ induziert werden, die sich zu Null ergänzen.

e) CULLWICK weist auch kurz auf die Elektrodynamik hin, die sich ergibt, wenn in den festliegenden Stromkreis D (Bild 2) eine Stromquelle (I_2) eingeschaltet wird.

Zylinder aus Kupfer. Fließt ein Strom I_2 in der Richtung $b-a$ durch den Zylinder, so ergibt sich eine Kraft $F_1 = l I_2 B_0$ an diesem, die ihn nach links zu bewegen sucht. Die Re-

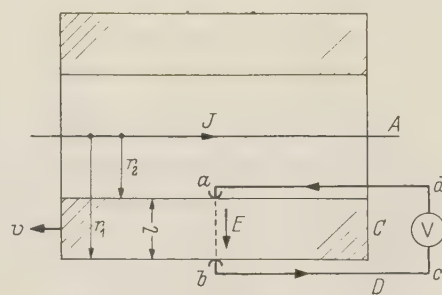


Bild 1.

aktionskraft F'_1 greift an der radialen Seite $c-d$ des Stromkreises an und wirkt nach rechts. Die Kräfte auf die axialen Seiten $a-d$ und $b-c$ seien unbeachtet.

f) Zylinder aus Eisen. In der Querschnittsfläche des Zylinders herrscht die Flußdichte $B = B_0 + B_i$. Infolge der zusätzlichen Flußdichte B_i ergeben sich die Kräfte

$$(+)\ F_2 = l I_2 B_i \text{ am Stromweg im Zylinder nach links,}$$

$$(-)\ F'_2 = l I_2 B_i \text{ am Flußweg im Zylinder nach rechts.}$$

Beide Kräfte greifen an der gleichen Materie des Eisenzylinders an, kompensieren sich also; es bleiben nur die Kräfte F'_1 und F_1 wirksam. Dies Ergebnis könnte auch auf Grund der folgen-

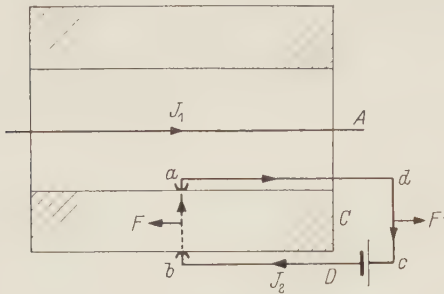


Bild 2.

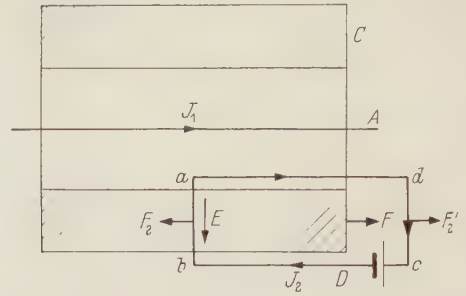


Bild 3.

den Regel I abgeleitet werden: Ist in einem Abschnitt eines Stromkreises (I) eine EMK E entgegen dem Strom vorhanden, so wird elektrische Leistung des Stromkreises in mechanische Leistung $P = I\bar{E}$ umgewandelt [4]. Bewegt sich im vorliegenden Falle der Zylinder (Cu, Fe) (Bild 2) nach links, so wird gemäß b) und c) eine EMK E zwischen a und b induziert, die entgegen dem Strom I_2 gerichtet ist. Da nun E proportional B_0 gefunden wurde, ist auch die mechanische Leistung und damit die Kraft F proportional B_0 und nicht proportional B .

g) Eine bemerkenswerte Ergänzung bildet der Fall, daß der Metallzylinder C einen Längsschlitz aufweist und der festliegende Stromkreis D ein vollständiges Rechteck bildet, dessen linke Seite $a-b$ ($= l = r_1 - r_2$) sich in diesem Schlitz, und dessen rechte Seite $c-d$ sich außerhalb des Zylinders befindet (Bild 3).

h) Zylinder aus Kupfer. Hierbei spielt die Anwesenheit des Zylinders keine Rolle. Auf die radialen Seiten des Stromkreises wirken gleiche Kräfte $\pm F_1 = l I_2 B_0$ nach entgegengesetzten Richtungen, sie heben sich also auf. Die Kräfte auf die axialen Seiten seien wieder unbeachtet.

i) Zylinder aus Eisen. Im Schlitz des Zylinders herrscht nun die mittlere Flußdichte $B = B_0 + B_i$. Am Stromkreis $a-b-c-d$ ergeben sich die Kräfte:

$$F_2 = l I_2 B = l I_2 (B_0 + B_i) \text{ am radialen Leiter } a-b \text{ nach links,}$$

$$F'_2 = l I_2 B_0 \text{ am radialen Leiter } c-d \text{ nach rechts, also bleibt}$$

$$F = F_2 - F'_2 = l I_2 (B_0 + B_i - B_0) = l I_2 B_i \text{ nach links.}$$

Die gleich große Kraft F wirkt am Eisenzylinder nach rechts; sie bewegt den Zylinder nach rechts. Dabei schneidet der Fluß entsprechend B_i (nur diese Komponente bewegt sich mit, die Komponente B_0 ist in Ruhe) die Seite $a-b$ und induziert in ihr die EMK $E = l v B_i$. Die EMK ist dem Strom I_2 entgegen gerichtet, was der Regel I entspricht. Gleichzeitig bestätigt der Vorgang eine andere Regel II der Elektrodynamik: An einem stromdurchflossenen Leitergebilde treten mechanische Kräfte auf, die es so zu bewegen oder umzugestalten suchen, daß der mit ihm verkettete magnetische Fluß größer wird. Im vorliegenden Fall wird durch die Bewegung des Eisenzylinders die Flußverkeftung mit dem Stromkreis vergrößert; dies gilt auch, wenn der Zylinder als festliegend, der Stromkreis dafür als beweglich angenommen wird.

k) Eine weitere Ergänzung bietet der Fall, daß der Zylinder ein permanenter Magnet ist und der zentrale Leiter fehlt. Dann ist $B_0 = 0$. In der Anordnung Bild 2 ist daher die Kraft auf den Zylinder $F_1 = l I_2 B_0 = 0$; ebenso ist $F'_1 = 0$.

l) In der Anordnung Bild 3 sind die beiden Kräfte am Leiterkreis, die sich im Fall i) aufgehoben, hier gleich Null ($I_1 = 0$), so daß wieder die Kräfte $\pm F = l I_2 B_i$ am Zylinder, bzw. am Leiterkreis angreifen.

m) Ein Sonderfall. Bei einem permanent magnetischen Zylinder, in Bild 4 im Querschnitt gezeichnet, ist ein gerader Leiter durch den Schlitz und über den Durchmesser zu einem Kontakt a auf dem Innenmantel geführt. Der Leiter wird von einem Kontakt b aus verlängert. Welche Kräfte treten am Zylinder auf, wenn ein konstanter Strom durch den Leiter geschickt wird? An der Stelle $a-b$ wirkt gemäß f) keine Kraft. Am Schlitz wirken dagegen gemäß l) gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte am Zylinder und am Stromleiter senkrecht zur Tafelenebene.

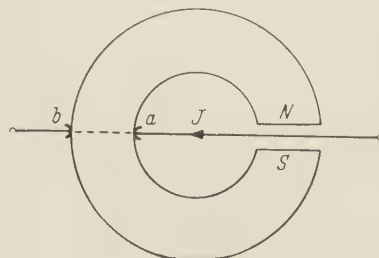


Bild 4.

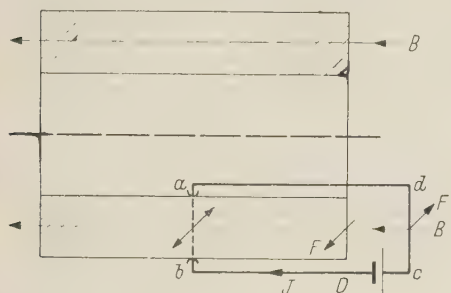


Bild 5.

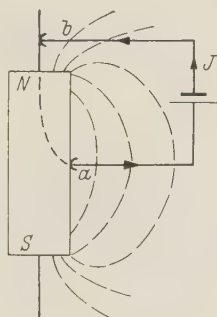


Bild 6.

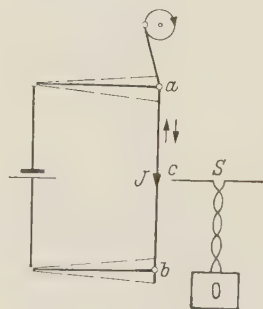


Bild 7.

n) Eine Variation zu Fall f). Der um seine Achse drehbare Zylinder (Bild 5) sei permanent axial magnetisiert. Der Stromkreis liege fest. Der magnetische Fluß dringt über die Stirnseiten des Zylinders hinaus und habe an der radialen Leiterseite $c-d$ der Länge l die mittlere Dichte B . Dann greift an dieser Seite die Kraft $F = l I B$ an; sie ist in die Tafelenebene gerichtet. Die gleichsinnigen Kräfte an $a-d$ und $b-c$ seien unberücksichtigt. Die entsprechende Reaktionskraft (aus der Tafelenebene) greift am Zylinder an und setzt ihn in Drehung um seine Achse. Zwar treten auch im Eisen bei $a-b$ Kräfte auf, aber sie kompensieren sich wie im Fall f). Auch hier gilt die Regel I: Bei der Drehung des Zylinders schneidet der Fluß die Seite $c-d$ und induziert in ihr eine EMK entgegen der Stromrichtung. Die Anordnung ist ein Unipolar-motor. Seine Drehzahl nimmt so lange zu, bis die induzierte EMK annähernd die EMK der Stromquelle kompensiert. Wenn der Zylinder mechanisch angetrieben wird, wirkt die Anordnung als Gleichstromgenerator.

o) Einfachste Form der Unipolarmaschine (Bild 6). Ein zylindrischer Stabmagnet NS kann sich um seine Längsachse drehen. Ein ruhender Stromkreis (I) ist so angeordnet, daß die Enden bei a auf der Mitte des Stabumfanges; bzw. bei b auf der Achse schleifen, und der Magnet selbst ($b-a$) den Schluß herstellt. Der äußere Kreisabschnitt $a-b$ liegt im magnetischen Fluß und erfährt eine Kraft in die Tafelenebene; die entsprechende Reaktionskraft wirkt auf den Umfang des Magneten (aus der Tafelenebene) und erzeugt dort ein Drehmoment. Wird der Magnet mechanisch in Drehung versetzt, so wirkt die Anordnung als Generator: Durch den Schnitt der Flußlinien mit dem äußeren Leiterkreis $a-b$ wird in diesem eine EMK induziert.

Bemerkung. Im Schrifttum, besonders im angelsächsischen [2, 5] wird die Meinung vertreten, daß die EMK nicht im äußeren Abschnitt $a-b$, sondern im Abschnitt $b-a$ innerhalb des Magneten induziert werde. Diese Meinung wird damit begründet, daß der Fluß des symmetrisch magnetisierten Stabes in seiner Umgebung überall die gleiche Richtung und Dichte behalte, wenn er sich drehe, also sich nicht von einem ruhenden Fluß unterscheide. Ein ruhender Fluß könne aber nicht auf einen ruhenden Leiter induzierend wirken. Hiergegen

ist einzuwenden, daß, wenn auch das mathematische B -Vektorfeld in der Umgebung des Magneten sich nicht ändert, die physikalischen Flußlinien die Drehung des Magneten mitmachen¹. Dies geht auch aus folgendem Versuch hervor [6]. Ein von Gleichstrom durch-

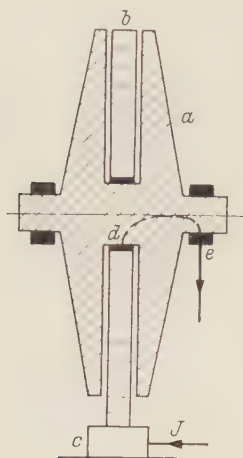


Bild 8.

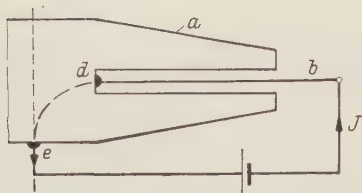


Bild 9.

flossener gerade Leiter $a-b$ (Bild 7) werde so angetrieben, daß der Punkt c auf und ab schwingt. Der den Leiter umschlingende magnetische Fluß ändert dabei an keiner Stelle seine Richtung oder Stärke, befindet sich also gemäß der zitierten Auffassung in Ruhe. Dennoch schwingen die Flußlinien mit ihrer Quelle auf und ab und induzieren z. B. in einer quer gehaltenen Sonde S eine Wechsel-EMK, wie etwa mittels eines Oszillographen festgestellt werden kann. Auch der CULLWICKSche Versuch weist auf die enge Verbindung von Fluß und Träger oder Quelle hin (siehe c).

p) Der Unipolarmotor (Bild 8) [7] hat wenig Ähnlichkeit mit dem in Bild 6 dargestellten; dennoch ist er im Prinzip der gleiche. Der Eisenkörper a besteht aus einem zylindrischen Kern und zwei konischen Polscheiben. Im Zwischenraum zwischen den Polen ist eine flache Spule b mit Spiel angeordnet. Ihr äußeres Ende ist mit einem festen Metallklotz c verbunden, das andere durch einen Schleifkontakt d mit dem Kern des Eisenkörpers. Der Strom wird bei c zugeführt, durchfließt die Spule und den Kern und wird über das Lager e herausgeleitet. Der Eisenkörper ist also ein Elektromagnet, der durch die Spule b erregt wird. Der Einfachheit wegen sei jedoch angenommen, daß der Eisenkörper ein permanenter Magnet sei, dann genügt als Stromleiter ein radialer gerade Draht b zwischen c und d (Bild 9). Diese Anordnung erinnert an die in Bild 4 dargestellte. Die am Polspalt auftretenden Kräfte (bzw. die Drehmomente) am Stromleiter $c-d$, bzw. an den Polen sind entgegengesetzt gleich groß. Das Drehmoment an den Polen setzt den Magnetkörper in Drehung; die Anordnung ist ein Unipolarmotor, kann aber auch als Generator wirken.

Zusammenfassung

Ausgehend von CULLWICKS klassischem Versuch wurde das Kräftespiel analysiert, das an verschiedenen Anordnungen aus Stromkreis und Eisenkörper auftritt. Hierbei wurde die Auffassung vertreten und begründet, daß magnetische Flüsse an ihren Quellen oder Trägern haften und deren Bewegung mitmachen, auch dann, wenn sich dabei weder Richtung noch Dichte an keiner Stelle ändern. Die Anordnungen leiteten über zu den Unipolarmaschinen.

Schrifttum

- [1] A. H. FINLAY in der Diskussion über die Arbeit: [2].
- [2] CRAMP, W. u. E. H. NORGROVE: Some Investigations on the Axial Spin of a Magnet. Journ. I. E. E. 78 (1936), p. 481; Diskussion ebenda 79 (1936) p. 344.
- [3] CULLWICK, E. G.: An Experiment on Electromagnetic Induction by Linear Motion. Journ. I. E. E. 85 (1939) p. 315.
- [4] BÖNING, P.: Zur Vorzeichenfrage bei elektrischen Größen. Elektrot. u. Maschinenbau 71 (1954) S. 365.
- [5] HOWE, G. W. O.: Some Electromagnetic Problems. Proc. of the Inst. of Electric Engineers, London, 97I (1950) p. 129.
- [6] MOON, P., and D. E. SPENCER: Some Electromagnetic Paradoxes. Journ. of the Franklin Institut, Philadelphia, 260 (1955) p. 373. Ein ähnlicher Versuch mit gleichem Ergebnis wird beschrieben.
- [7] BÖNING, P.: ETZ 73 (1952) S. 76, und
HOWE, G. W. O.: A Novel Form of D. C. Motor. Wireless Engin. 29 (1952) p. 285.

Prof. Dr.-Ing. P. BÖNING, Hannover, Sedanstr. 66 II

¹ Voraussetzung ist natürlich, daß keine ruhenden Eisenkörper in der Umgebung des Magneten Teile des Flusses binden.

Die Berechnung von Impedanz-, Admittanz- und gemischten Matrizen für besondere Klemmenpaare eines Netzes

Von

HANS EDELMANN, Erlangen

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 9. Juli 1961)

Übersicht: In drei vorausgegangenen Arbeiten wurde die Aufstellung von Maschen-Impedanz-, Knotenpunkts-Admittanz- und Schnittmengen-Admittanzmatrix sowohl für Netze, die ausschließlich aus Zweipolen bestehen, als auch für Netze, die außerdem noch Transformatoren und andere Vierpole enthalten, behandelt. Gelegentlich benötigt man nicht alle Ströme bzw. Spannungen in einem Netz, in anderen Fällen benötigt man nur Impedanz- bzw. Admittanzmatrizen für eine Untermenge von Klemmenpaaren. Die für solche Aufgaben benötigten Matrizen erhält man aus den bisher behandelten Matrizen durch eine Teil-Elimination. Gemischte Matrizen (z. B. auch Kettenmatrizen) erhält man durch Variablentausch.

1. Einleitung

In zahlreichen Netzuntersuchungen will man nicht Ströme, Spannungen oder Leistungen in den Zweigen eines Netzes ermitteln¹, sondern vielmehr gewisse Koeffizientensysteme bestimmen, welche die gegenseitige Kopplung der Spannungs- oder Stromquellen charakterisieren. Zu diesen Aufgabenstellungen gehören z. B. Untersuchungen der statischen und dynamischen Stabilität und Unsymmetrie-Probleme. Die Grundlage solcher Untersuchungen bilden gewöhnlich die System-Impedanz-, System-Admittanzmatrizen und in einigen Fällen auch gemischte Matrizen, z. B. Kettenmatrizen der entsprechenden Netzsysteme. Auch bei der Darstellung der Netzverluste durch eine quadratische Form der Einspeise- und Abnehmerleistungen, und schließlich unter der zusätzlichen Bedingung „Proportionalität der Abnehmerleistungen untereinander“ sogar durch eine quadratische Form der Einspeiseleistungen allein, geht man von der entsprechenden Impedanzmatrix des Netzes aus. Hierbei zeigt es sich, daß man gelegentlich erhebliche Einsparungen an Rechenzeit auf dem Digitalrechner erzielt, sofern man die richtige Methode anwendet und hierbei gewisse topologische Gegebenheiten ausnutzt. Zwar kann man durch Inversion der Impedanzmatrix immer die entsprechende Admittanz-Matrix ermitteln und umgekehrt, doch je nachdem, welche Methode man wählt, kann man die gleiche gesuchte Matrix einmal durch einfache Inversion und das andere Mal durch eine Teilelimination berechnen. Nun kann es sein, daß man im 1. Fall z. B. eine 50×50 Matrix zu invertieren hat, im 2. Fall vielleicht nur eine 10×10 Matrix. Wenn man von den außerdem noch erforderlichen Matrizenmultiplikationen absieht, so benötigt man im letzteren Fall etwa nur 1/125 der Inversionszeit. Auch leidet die Genauigkeit bei Inversionen hoher Ordnung.

2. Teilelimination und Variablentausch in einem linearen System

2.1 Die Grundaufgabe

Die Berechnung von Impedanz-, Admittanz- oder Kettenmatrizen für bestimmte Klemmenpaare eines gegebenen Netzes läßt sich immer auf die Grundaufgabe der Teilelimination oder allgemeiner des Variablentauchs in einem linearen Gleichungssystem zurückführen, wenn man davon ausgeht, daß die Maschinenimpedanz-, Knotenpunkts- bzw. Schnittmengen-admittanzmatrix ermittelt sind. Wir betrachten hierzu ein Gleichungssystem, dessen unab-

¹ Der Ermittlung von Strömen, Spannungen und Leistungen in der Zweigen eines Netzes sind die Arbeiten [72], [82] und [97] gewidmet (im folgenden kurz AGNI, ISNE und TAVNI genannt).

hängige Veränderliche $x_1 \dots x_{n+m}$ und abhängige Veränderliche $y_1 \dots y_n$ in zwei (nicht notwendig gleiche) Gruppen unterteilt sind, gemäß

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Das Gleichungssystem laute

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \quad (3a)$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{12} \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1, \\ \mathbf{M}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2. \end{cases} \quad (3b)$$

Die Matrizen \mathbf{M}_{ik} sind nun Untermatrizen, aus denen größere Matrizen, sozusagen „Matrizen von Matrizen“ gebildet werden können, und für die die Regeln für Addition, Subtraktion und Multiplikation ebenso gelten wie für „Matrizen von (komplexen) Zahlen“. Allerdings sind hierbei die besonderen Rechenregeln für Matrizen bezüglich der Untermatrizen zu beachten: insbesondere Verbot der Vertauschung von Faktoren (von Sonderfällen abgesehen); Nichtexistenz der Inversen, falls die Determinante verschwindet; Verbot der Kürzung für singuläre Matrizen.

Eine wichtige Aufgabe der linearen Algebra besteht darin, einen Teil der Unbekannten eines Gleichungssystems zu eliminieren. Die schrittweise Elimination einzelner Unbekannten ist hierin als Sonderfall enthalten. Nehmen wir an, die dem Vektor \mathbf{x}_2 entsprechenden Unbekannten seien zu eliminieren, so kann man \mathbf{x}_2 der unteren Matrizengleichung von (3b) ausrechnen und in die obere Matrizengleichung einsetzen. Hierzu ist erforderlich, daß die Inverse von \mathbf{M}_{22} existiert. Trifft dies nicht zu, so ist die Teilelimination der Unbekannten nicht möglich. Dieser Fall soll ausgeschlossen werden. Es sei also $\det \mathbf{M}_{22} \neq 0$. Dann erhält man durch Multiplikation der unteren Matrizengleichung von (3b) mit \mathbf{M}_{22}^{-1} von links, wenn man \mathbf{x}_2 isoliert

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{y}_2 \quad (4)$$

und nach Einsetzen in die obere Gleichung (3b)

$$(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21}) \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 \quad (5)$$

Schafft man den Term mit \mathbf{y}_2 noch auf die rechte Seite, so erhält man die gewünschte Beziehung zwischen einem Teil der Unbekannten \mathbf{x}_1 und den rechten Seiten \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 . Die restlichen Unbekannten \mathbf{x}_2 treten in dieser Beziehung nicht mehr auf. Wir erhalten

$$(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21}) \mathbf{x}_1 = -\mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_1 \quad (6)$$

Das Gleichungssystem (6) kann man auch erhalten, indem man die untere Matrizengleichung von (3b) mit $-\mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1}$ multipliziert und zu der oberen Matrizengleichung addiert.

Vertauscht man in (4) die beiden Seiten der Matrixgleichung und setzt sie unter (5), so kann das entstehende System von Matrixgleichungen in Untermatrizen auch folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} & M_{12} M_{22}^{-1} \\ & -M_{22}^{-1} M_{21} & M_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Vergleicht man dieses System mit (3a), so erkennt man, daß jeweils die unteren Vektoren x_2 und y_2 vertauscht sind. Man nennt den Übergang von (3a) auf (7) deshalb auch Variablentausch bezüglich x_2 und y_2 .

Damit der Variablentausch (bzw. die Teilelimination) möglich ist, muß also die Inverse der den zu tauschenden Variablen zugeordneten Untermatrix M_{22} existieren.

2.2 Verallgemeinerungen des Variablentauschs

Gelegentlich ist es auch erforderlich, die Matrix eines Gleichungssystems dreifach zu unterteilen und dieses zu schreiben

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Tauscht man die Vektoren x_3 und y_3 , so erhält man

$$\begin{pmatrix} M_{11} - M_{13} M_{33}^{-1} M_{31} & M_{12} - M_{13} M_{33}^{-1} M_{32} & M_{13} M_{33}^{-1} \\ M_{21} - M_{23} M_{33}^{-1} M_{31} & M_{22} - M_{23} M_{33}^{-1} M_{32} & M_{23} M_{33}^{-1} \\ & -M_{33}^{-1} M_{32} & M_{33}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Dies läßt sich dadurch zeigen, daß man einführt

$$\begin{aligned} M_{\underline{11}} &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, & M_{\underline{12}} &= \begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \end{pmatrix}, \\ M_{\underline{21}} &= \begin{pmatrix} M_{31} & M_{32} \end{pmatrix}, & M_{\underline{22}} &= M_{33}. \end{aligned} \quad (10)$$

und auf diese Blockmatrizen den Variablentausch nach (7) anwendet. Praktisch wichtiger ist der Tausch innerer Variablen, also von x_2 und y_2 . In diesem Fall erhält man

$$\begin{pmatrix} M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} & M_{12} M_{22}^{-1} & M_{13} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{23} \\ & -M_{22}^{-1} M_{21} & -M_{22}^{-1} M_{23} \\ M_{31} - M_{32} M_{22}^{-1} M_{21} & M_{32} M_{22}^{-1} & M_{33} - M_{32} M_{22}^{-1} M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Diese Gleichung ergibt sich durch kombinierte Vertauschung der Spalten und Zeilen 2 und 3 in der Systemmatrix von (9) und anschließender Indexvertauschung von 2 und 3.

2.3 Schrittweise Vertauschung der Variablen

In gewissen Fällen ist es zweckmäßiger, den Variablentausch (bzw. die Teilelimination) nicht blockweise, sondern schrittweise zu vollziehen, insbesondere dann, wenn die Matrizen nicht voll besetzt sind. Die schrittweise Vertauschung hat außerdem noch den Vorteil, daß eine Partitionierung nach (3a) bzw. (3b) nicht vollzogen zu sein braucht. Außerdem kann die Reihenfolge der zu tauschenden Variablen beliebig gewählt werden. Dies ist deshalb wichtig, weil das entsprechende Hauptdiagonalelement, durch das dividiert werden muß, von null verschieden sein soll. Ist dies zunächst nicht der Fall, so muß man dazu übergehen, das nächste Variablenpaar zu tauschen. Erst dann, wenn sämtliche Koeffizienten der noch zu tauschenden Variablen verschwinden, ist der Variablentausch nicht möglich. Im allgemeinen liegt jedoch die Aufgabenstellung so, daß dieser letzte Fall ausgeschlossen werden kann².

² Streng genommen ist für die Ausführung dieser Gauss-Jordan-Elimination eine Kopplung der Variablennummern nicht erforderlich, im Gegenteil: Um alle Möglichkeiten auszuschöpfen, müssen die Nummern der zu tauschenden Variablen frei wählbar sein (vgl. hierzu die Arbeit von H. RUTISHAUSER [98]). Durch geeignete Einführung von Verlusten kann von vornherein gesichert werden, daß jeder Eliminationsschritt auch bei Kopplung der Variablennummern ausführbar ist. In diesem Fall befinden sich die Pivotelemente ausschließlich in der Hauptdiagonale.

Damit der Algorithmus nicht entartet, sollte man auch die Division durch kleine Hauptdiagonalelemente vermeiden und stattdessen immer das betragsmäßig größte Hauptdiagonalelement als Leitelement verwenden (Pivotsuche!).

Wir wollen nur den Fall betrachten, daß die zu tauschende Variable innen gelegen ist entsprechend Gl. (11). Dann werden die folgenden Vektoren bzw. die folgende Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= x_2, \\ y_2 &= y_2, \\ \text{und } M_{22} &= m_{22}. \end{aligned}$$

Skalare, ferner die folgenden rechteckigen Matrizen

$$\begin{aligned} M_{12} &= m_{12}, \\ \text{und } M_{32} &= m_{32}. \end{aligned}$$

Spaltenvektoren und außerdem die dazu symmetrisch zur Hauptdiagonale liegenden Matrizen

$$\begin{aligned} M_{21} &= \tilde{m}_{21}, \\ M_{23} &= \tilde{m}_{23}.^3 \end{aligned}$$

Zeilenvektoren, so daß (11) übergeht in

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \frac{m_{12}\tilde{m}_{21}}{m_{22}} & \frac{m_{12}}{m_{22}} & M_{13} - \frac{m_{12}\tilde{m}_{23}}{m_{22}} \\ & \frac{\tilde{m}_{21}}{m_{22}} & \frac{1}{m_{22}} \\ M_{31} - \frac{m_{32}\tilde{m}_{21}}{m_{22}} & \frac{m_{32}}{m_{22}} & M_{33} - \frac{m_{32}\tilde{m}_{23}}{m_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (11a)$$

Der Fall, daß die zu tauschende Variable an erster oder letzter Stelle steht, ist nun trivial und braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden.

3. Erzeugung von System-Impedanzmatrizen

3.1 Reduktion einer System-Impedanzmatrix

Eine System-Impedanzmatrix \mathbf{Z} (System-Admittanzmatrix \mathbf{Y}) eines elektrischen Netzes (ohne Konstantstrom- oder Konstantspannungsquellen) ist die Impedanzmatrix (Admittanzmatrix), welche die linearen Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen für herausgeführte Klemmenpaare beschreibt, entsprechend der Gleichung $\mathbf{u} = \mathbf{Z} \mathbf{i}$ (bzw. $\mathbf{i} = \mathbf{Y} \mathbf{u}$).

Wir betrachten eine durch eine System-Impedanzmatrix beschriebene lineare Beziehung zwischen Strömen und Spannungen

$$\mathbf{Z} \mathbf{i} = \mathbf{u}. \quad (12)$$

Nun seien einige der Spannungen u_i auf der rechten Seite gleich null (Kurzschluß). Wir nehmen an, die Numerierung der u_i sei so getroffen, daß von den $n + m$ Spannungen u_i die letzten m Spannungen gleich null sind; dann kann man eine entsprechende Partitionierung auch für die dazugehörigen Ströme i_i und für die \mathbf{Z} -Matrix einführen. Damit ergibt sich das Gleichungssystem (vgl. hierzu das entsprechende Bild 1)

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Für den Fall, daß die Ströme i_2 nicht interessieren, erhält man eine Beziehung zwischen den Vektoren \bar{u}_1 und i_1 durch Teilelimination gemäß Gleichungssystem (6). Es ist (mit $\bar{u}_2 = \mathbf{0}$)

$$(Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21}) i_1 = \bar{u}_1 \quad (14)$$

oder

$$Z_{11} i_1 = \bar{u}_1. \quad (14a)$$

³ Die Tilde soll andeuten, daß die betreffenden Vektoren keine Spaltenvektoren sondern Zeilenvektoren sind.

Die Impedanzmatrix des reduzierten Systems ergibt sich somit aus der Beziehung

$$\bar{Z}_{11} = Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21}. \quad (15)$$

Rechnerisch kann man diese Teilelimination entweder nach dieser Formel blockweise durchführen oder analog (11a) schrittweise, was unter den angegebenen Bedingungen gelegentlich vorteilhafter ist. Jeder Schritt vollzieht sich dann nach der Gleichung

$$\bar{Z}_{11}^{(r)} = Z_{11}^{(r)} - \frac{Z_{12}^{(r)} \bar{Z}_{21}^{(r)}}{Z_{22}^{(r)}}. \quad (16)$$

$$= \begin{pmatrix} Z_{11}^{(r+1)} & Z_{12}^{(r+1)} \\ \bar{Z}_{21}^{(r+1)} & Z_{22}^{(r+1)} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Die Reduktion beginnt gemäß der folgenden Gleichung

$$Z = \bar{Z}_{11}^{(0)} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(1)} & Z_{12}^{(1)} \\ \bar{Z}_{21}^{(1)} & Z_{22}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

und ist beendet, wenn $r = m$, d. h. m Schritte gemäß (16) und (17) ausgeführt sind. Es ist also

$$Z_{11} = Z_{11}^{(m)}. \quad (19)$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß jeweils $Z_{22}^{(r)}$ von null verschieden ist. Ist dies einmal nicht der Fall, so müssen kombinierte Zeilen- oder Spaltenvertauschungen vorgenommen werden. Um eine Division durch kleine Zahlen zu vermeiden, wird auch hier eine Pivotsuche vorgeschlagen derart, daß das betragsmäßig größte Element als Leitelement verwendet wird. Zu diesem Zweck hat man entsprechend kombinierte Zeilen- und Spaltenvertauschung so vorzunehmen, daß das Leitelement in die Position von $Z_{22}^{(r)}$ gelangt, damit der Algorithmus gemäß (16) und (17) angewandt werden kann.

Man kann natürlich auch die Teilelimination schrittweise ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung durchführen, und zwar so, wie in 2.3 geschildert. Da aber im Fall der schrittweisen Teilelimination jeweils die am weitesten rechts liegende Spalte und die unterste Zeile später nicht mehr benötigt wird, und das dyadische Produkt im 2. Term von Gl. (16) mit jedem Schritt kürzer wird, ergibt der zuerst angegebene Weg eine kürzere Rechenzeit. Diese kürzere Rechenzeit könnte man zwar auch in der schrittweisen Teilelimination nach Kap. 2.3 erzielen, indem man die den erledigten Zeilen und Spalten zugeordneten Multiplikationen einfach überspringt, doch ist dieser Weg organisatorisch zu umständlich. Aus diesem Grund ist das Vorgehen nach Kap. 2.3 nur bei einem echten Variablentausch zu empfehlen, da in diesem Fall auch die „erledigten“ Zeilen und Spalten weiter behandelt werden müssen.

3.2 Erzeugung einer System-Impedanzmatrix durch Reduktion der Maschenimpedanzmatrix

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf allgemeine System-Impedanzmatrizen. In den vorausgegangenen Arbeiten [72, [82] und [97] wurde die Aufstellung spezieller Matrizen, wie Maschenimpedanzmatrizen und Knotenpunkts- bzw. Schnittmengenadmittanzmatrizen beschrieben. Im folgenden wird zunächst gezeigt, wie man System-Impedanzmatrizen für bestimmte herausgeführte Klemmenpaare aus Maschenimpedanzmatrizen ermittelt. Die Ermittlung von System-Admittanzmatrizen ergibt sich dann analog.

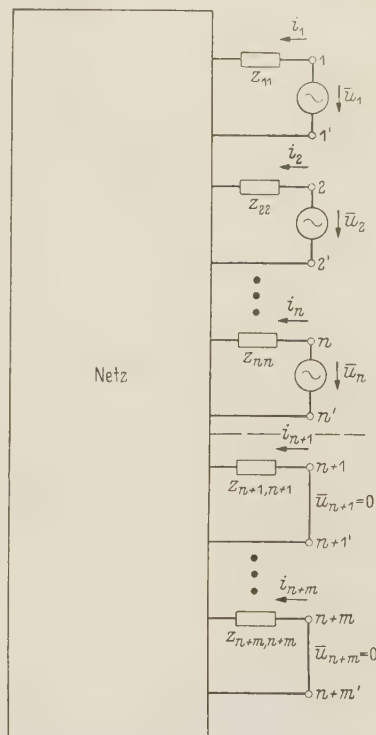


Bild 1. Zur Reduktion einer Impedanzmatrix: Netz mit $n + m$ Klemmenpaaren, die letzten m Klemmenpaare sind kurzgeschlossen. Unter der Voraussetzung, daß die Impedanzmatrix des Netzes mit $n + m$ Klemmenpaaren existiert, kann eine Reduktion auf n Klemmenpaare durchgeführt werden, falls die den m Klemmenpaaren zugeordnete Impedanz-Untermatrix eine Inverse besitzt. Zur Erzeugung einer System-Impedanzmatrix für beliebige herausgeführte Klemmenpaare werden $r = s - k + 1 = n + m$ Klemmenpaare in unabhängige Zweige gelegt. Die sich ergebende Maschenimpedanzmatrix wird danach auf $n = r - m$ Klemmenpaare reduziert.

Die Impedanzmatrix für n herausgeführte Klemmenpaare (z. B. die Impedanzmatrix für n Kraftwerke eines Netzes⁴) erhält man dadurch, daß man zunächst beim Aufstellen der Maschenimpedanzmatrix an diesen herausgeführten Klemmenpaaren Generatoren mit elektromotorischen Kräften $-\bar{u}_1 \dots -\bar{u}_n$ ⁵ einführt, die zusammen mit möglicherweise vorhandenen Impedanzen in unabhängigen Zweigen liegen müssen. Ist eine Verlegung in unabhängige Zweige nicht möglich, so existiert die Maschenimpedanzmatrix nicht. Dieser Fall soll hier ausgeschlossen sein. In den übrigen Zweigen werden die elektromotorischen Kräfte gleich null gesetzt. Damit ergibt sich eine Matrixengleichung zwischen den Strömen in den unabhängigen Zweigen, das sind gleichzeitig auch die Maschenströme, und den treibenden Spannungen e in den unabhängigen Zweigen und zwar über die Maschen-Impedanzmatrix (nach Gl. (13), Kap. 2 in AGNI, bzw. Gl. (14), Kap. 2.21 oder Gl. (45), Kap. 3 in TAVNI). Da in C_t bezüglich e nur die Einheitsmatrix wirksam wird, erhält man

$$Z^0 i^0 = -C_t e_{(z)} = -e_{(n+m)} \quad (20)$$

und mit

$$e_{(z)} = - \begin{pmatrix} \bar{U}_{(n)} \\ \mathbf{o}_{(m)} \\ \mathbf{o}_{(z-n-m)} \end{pmatrix}^6 \quad (21)$$

schließlich

$$Z^0 i^0 = \begin{pmatrix} \bar{U}_{(n)} \\ \mathbf{o}_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Wir führen eine Partitionierung entsprechend der rechten Seite ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} Z_{11}^0 & Z_{12}^0 \\ Z_{21}^0 & Z_{22}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1^0 \\ i_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Die Impedanzmatrix für die n Klemmenpaare erhält man durch blockweise Teilelimination nach Gl. (15)

$$Z_{11}^0 = Z_{11}^0 - Z_{12}^0 Z_{22}^{0^{-1}} Z_{21}^0 \quad (24)$$

oder durch eine schrittweise durchgeführte Elimination, wie bereits beschrieben.

4. Erzeugung von System-Admittanzmatrizen

4.1 Reduktion einer System-Admittanzmatrix

Die Reduktion einer System-Admittanzmatrix bietet jetzt eigentlich nichts Neues, denn wir brauchen die in Kap. 3 gemachten Überlegungen nur dual zu übertragen. Wir betrachten wieder ein lineares System, das jetzt aber durch eine Admittanzmatrix beschrieben ist und nehmen weiter an, daß einige der Ströme i_i gleich null zu setzen sind (Unterbrechung, offene Klemmen, Leerlauf). Die Numerierung der i_i sei wieder so getroffen, daß von den $n + m$ Strömen i_i die letzten m Ströme gleich null sind; dann kann man eine entsprechende Partitionierung auch für die Spannungen u_i und damit auch für die Y -Matrix einführen. Bild 2

⁴ Eine solche Impedanzmatrix benötigt man z. B. bei Untersuchung der statischen Stabilität von Schenkel-pol- oder/und Vollpolsynchronmaschinen in einem Drehstromverbundnetz [88] oder zur Berechnung der Verlustkoeffizientenmatrix eines Drehstromverbundnetzes [84], [85] und [86].

⁵ Um auf die übliche Pfeildefinition der Klemmenströme und -Spannungen in Impedanzmatrizen zu kommen, müssen die elektromotorischen Kräfte mit umgekehrtem Vorzeichen eingeführt werden.

⁶ Die eingeklammerten Indizes geben die Länge (Anzahl der Elemente) der betreffenden Vektoren (Spaltenmatrizen) an. Es ist in Übereinstimmung mit AGNI z = Anzahl der Zweige, $m + n = r = z - h + 1$ = Anzahl der Maschen = Anzahl der unabhängigen Zweige und $z - n - m = h - 1$ = Anzahl der Knotenpunkte minus eins.

zeigt ein entsprechendes Netz mit den Definitionspfeilen der Ströme und Spannungen und den n offenen Klemmen. Das sich hierdurch ergebende Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Mit

$$\bar{Y}_{11} = Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} \quad (26)$$

erhält man eine Beziehung

$$\bar{Y}_{11} u_1 = i_1, \quad (27)$$

in welcher die Spannungen des Vektors u_2 nicht mehr vorkommen. Auch hier ist sowohl die blockweise als auch die schrittweise Elimination möglich. Im letzteren Fall ist je der Schritt gemäß

$$\bar{Y}_{11}^{(r)} = Y_{11}^{(r)} - \frac{Y_{12}^{(r)} \tilde{Y}_{21}^{(r)}}{Y_{22}^{(r)}} \quad (28)$$

$$= \begin{pmatrix} Y_{11}^{(r+1)} & Y_{12}^{(r+1)} \\ \tilde{Y}_{21}^{(r+1)} & Y_{22}^{(r+1)} \end{pmatrix} \quad (29)$$

auszuführen. Die Reduktion beginnt gemäß

$$Y = \bar{Y}_{11}^{(0)} = \begin{pmatrix} Y_{11}^{(1)} & Y_{12}^{(1)} \\ \tilde{Y}_{21}^{(1)} & Y_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

und ist beendet mit

$$\bar{Y}_{11} = Y_{11}^{(m)}. \quad (31)$$

Auch hier muß wieder jedes $Y_{22}^{(r)}$ von null verschieden sein, damit der Algorithmus durchgeführt werden kann. Im übrigen wird hier ebenfalls eine Pivotsuche empfohlen, um den Eliminations-Algorithmus möglichst günstig ablaufen zu lassen. Im Falle eines Polygonnetzwerks kann die schrittweise Elimination in einer Knotenpunktsadmittanzmatrix als eine Stern-Vieleck-Transformation gedeutet werden (vgl. Kap. 5).

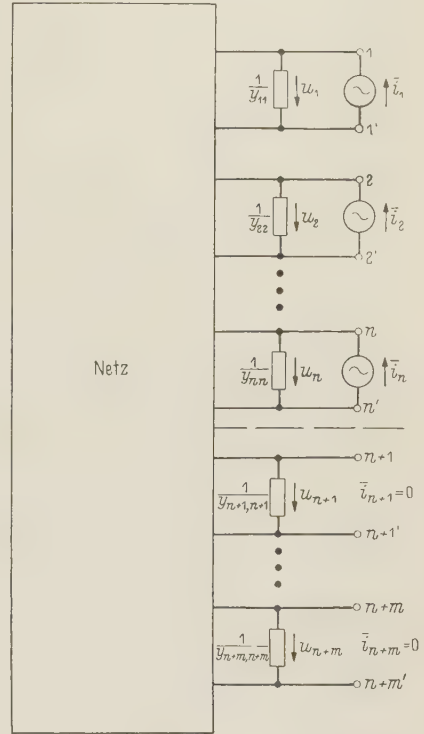


Bild 2. Zur Reduktion einer Admittanzmatrix: Netz mit $n + m$ Klemmenpaaren, die letzten m Klemmpaare sind offen. Unter der Voraussetzung, daß die Admittanzmatrix des Netzes von $n + m$ Klemmenpaaren existiert, kann eine Reduktion auf n Klemmenpaare durchgeführt werden, falls die den m Klemmenpaaren zu geordnete quadratische Admittanz-Untermatrix eine Inverse besitzt. Zur Erzeugung einer System-Admittanzmatrix für beliebige herausgeführte Klemmenpaare werden $k-1 = n + m$ Klemmenpaare in Baumzweige gelegt. Die sich ergebende Schnittmengenadmittanzmatrix wird danach auf $n = k-1-m$ Klemmenpaare reduziert.

4.2 Erzeugung einer System-Admittanzmatrix durch Reduktion der Schnittmengenadmittanzmatrix

Um die Überlegungen von Kap. 3.2 dual übertragen zu können, müssen wir die elektromotorischen Kräfte in den Zweigen dual übertragen. Der allgemeine Zweig in Bild 1, der aus einer Serienschaltung einer Impedanz z und eines Generators mit einer elektromotorischen Kraft e besteht, bei gleichsinniger Pfeilgebung von e , i und u , wird in der dualen Übersetzung durch eine Parallelschaltung einer Admittanz vertauscht und eines Generators mit einem erzwungenen Strom (Urstrom) j ersetzt mit ebenfalls gleichsinniger Pfeilgebung von j , u und i . Nun gilt in jedem Zweig

$$i_i = y_{ii} u_i + j_i$$

und in Matrizen

$$i = Y u + j. \quad (32)$$

Nach den Gln. (1), (3) und (4) von ISNE ergibt sich das Gleichungssystem für die Baumzweigspannungen (Schnittmengenspannungen)

$$Y^\Phi u^\Phi = H Y H_i u^\Phi = -H j. \quad (33)$$

Die Admittanzmatrix für (falls möglich) beliebige n herausgeführte Klemmenpaare (z. B. die Admittanzmatrix für n Kraftwerke eines Netzes, wie sie beispielsweise bei Untersuchungen

der statischen Stabilität eines Systems von n Vollpolsynchronmaschinen benötigt wird [88]) läßt sich dadurch gewinnen, daß man dual zu den Ausführungen in Kap. 3.2 zunächst beim Aufstellen der Maschenimpedanzmatrix an diesen herausgeführten Klemmenpaaren Generatoren einführt, die bei einheitlicher Pfeilgebung in jedem Zweig Ströme $j_i = -i_1 \cdots -i_n$ erzwingen. Parallel zu diesen Stromgeneratoren können dann noch Admittanzen liegen. Diese n generatorischen Zweige müssen so gewählt sein, daß sie zusammen ein System von Baumzweigen bilden. Ist eine solche Auswahl nicht möglich, so existiert die Schnittmengen-Admittanz-Matrix nicht. Dieser Fall soll hier ausgeschlossen sein. In den übrigen Zweigen befinden sich nur Admittanzen, d. h. die erzwungenen Ströme j_i sind in diesen Zweigen gleich null zu setzen. Auf diese Weise erhalten wir eine Matrixengleichung zwischen den Spannungen in den unabhängigen Zweigen (die hier identisch sind mit den Spannungen an den Admittanzen der Zweige) einerseits und den erzwungenen Strömen andererseits und zwar mittels der Schnittmengen-Admittanzmatrix. Da durch die besondere Auswahl der Zweige, in welchen erzwungene Ströme vorkommen dürfen (nämlich nur in den Baumzweigen), in \mathbf{H} nur die Einheitsmatrix wirksam wird, erhält man

$$\mathbf{Y}^\Phi \mathbf{u}^\Phi = -\mathbf{H} \mathbf{j}_{(s)} = -\mathbf{j}_{(k-1)} \quad (34)$$

und mit

$$\mathbf{j}_{(s)} = - \begin{pmatrix} \bar{i}_{(n)} \\ \mathbf{o}_{(m)} \\ \mathbf{o}_{(z-n-m)} \end{pmatrix} \quad (35)$$

schließlich

$$\mathbf{Y}^\Phi \mathbf{u}^\Phi = \begin{pmatrix} \bar{i}_{(n)} \\ \mathbf{o}_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Die gewünschte Admittanzmatrix für n Klemmenpaare erhält man durch blockweise Teil-elimination aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}^\Phi & \mathbf{Y}_{12}^\Phi \\ \mathbf{Y}_{21}^\Phi & \mathbf{Y}_{22}^\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\Phi \\ \mathbf{u}_2^\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

und diese Matrix lautet

$$\bar{\mathbf{Y}}_{11}^\Phi = \mathbf{Y}_{11}^\Phi - \mathbf{Y}_{12}^\Phi \mathbf{Y}_{22}^{\Phi^{-1}} \mathbf{Y}_{21}^\Phi, \quad (38)$$

dargestellt in Form einer blockweisen Elimination. Die schrittweise Elimination kann in gewissen Fällen als eine Stern-Vieleck-Transformation gedeutet werden. Hierauf wird im folgenden Kapitel näher eingegangen.

5. Die Elimination von Knotenpunkten als Reduktion der Knotenpunktsadmittanzmatrix

Die Knotenpunktsadmittanzmatrizen eignen sich im allgemeinen nicht für die Erzeugung von System-Admittanzmatrizen, da sich Knotenpunktsströme und -Spannungen nicht immer so anordnen lassen, daß sie dem der System-Admittanzmatrix zugrundegelegten System von Klemmenpaaren entsprechen. Es gibt allerdings eine wichtige Ausnahme, das sind Netze, in welchen jeweils eine Klemme der Klemmenpaare das gleiche Potential hat. In solchen Netzen mit einseitig durchverbundenen Klemmenpaaren kann man diese Klemmen mit gleichem Potential zum Bezugspunkt wählen. Zu der für ein solches System gültigen Admittanzmatrix kommt man auf zweierlei Weise:

Erstens kann man in Gl. (19) von AGNI, der KIRCHHOFFSchen Knotenpunktsgleichung, unterscheiden zwischen inneren und äußeren Strömen. Die inneren Ströme erhalten die gleiche Bezeichnung wie dort, die äußeren Ströme (das sind Ströme, die zusätzlich auf den Knotenpunkt zufließen) sind durch den Index a hinter der Knotenpunktsummer gekennzeichnet. In diesem Fall gilt anstelle von Gl. (19) AGNI

$$\mathbf{i}^+ = \mathbf{i}_a^+ = \begin{pmatrix} i_{1a}^+ \\ \vdots \\ i_{ka}^+ \end{pmatrix}. \quad (39)$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$\sum_{\alpha=1}^k i_{\alpha\alpha}^+ = 0. \quad (40)$$

Nun gilt anstelle von Gl. (20) AGNI, wenn man noch annimmt, daß im Innern des Netzes keine treibenden Spannungen vorhanden sind

$$\mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{K}_t \mathbf{u}^+ = \mathbf{i}_a^+. \quad (41)$$

Wir führen den letzten Knotenpunkt als Bezugsknotenpunkt ein und beachten, daß dieselbe Gleichung, wie in AGNI bereits ausgeführt, wegen Gültigkeit der Gl. (39) die negative Summe aller übrigen ist. Das System, das jetzt keine überflüssigen Gleichungen mehr enthält und die Beziehungen zwischen den auf den Bezugspunkt bezogenen Spannungen und den äußeren Knotenpunktströmen beschreibt, lautet

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{K}}_t \tilde{\mathbf{u}}^+ = \mathbf{i}_a^+ \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}^+ \tilde{\mathbf{u}}^+ = \tilde{\mathbf{i}}_a^+. \quad (43)$$

Zweitens können wir in dem gleichen Netz ausgehend von dem Bezugsknotenpunkt Baumzweige derart einführen, daß jeder Knotenpunkt durch diese Baumzweige mit dem Bezugsknotenpunkt verbunden ist. In jedem Baumzweig wird eine Stromquelle eingeführt mit einem Definitionspfeil, der vom Bezugsknotenpunkt wegweist. Die Baumzweigadmittanzen werden gleich null gesetzt. Die auf diese Weise sich ergebende Schnittmengen-Admittanz-Matrix \mathbf{Y}^φ ist identisch mit der oben hergeleiteten Knotenpunkts-Admittanzmatrix \mathbf{Y}^+ . Dies folgt auch daraus, daß \mathbf{B} (nach Kap. 4.3 AGNI) hier eine Einheitsmatrix ist.

Reduzieren wir nun eine solche Knotenpunktmatrix, so entspricht die eliminierte Knotenpunktsspannung einem aufgelösten Knotenpunkt. Nehmen wir außerdem an, es soll die letzte der Knotenpunktsspannungen eliminiert werden, so wird die reduzierte Matrix entsprechend Gl. (28) folgendermaßen errechnet

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{11}^+ = \tilde{\mathbf{Y}}_{11}^+ - \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{12}^+ \tilde{\mathbf{y}}_{21}^+}{\tilde{\mathbf{y}}_{22}^+} \quad (44)$$

Das in der p -ten Zeile und in der q -ten Spalte stehende Element der Matrix $\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{11}^+$ errechnet sich nach der Formel

$$\tilde{\tilde{y}}_{pq}^+ = \tilde{y}_{pq}^+ - \frac{\tilde{y}_{p,k-1}^+ \tilde{y}_{k-1,q}^+}{\tilde{y}_{k-1,k-1}^+} \quad (44a)$$

Wir erinnern uns, daß in der Knotenpunkts-Admittanzmatrix außerhalb der Hauptdiagonale in der p -ten Zeile und q -ten Spalte die negative Gesamtadmittanz $-Y_{pq}$ des Zweiges zwischen dem p -ten und q -ten Knotenpunkt steht, in der Hauptdiagonale der p -ten Zeile und Spalte die Summe aller Admittanzen der Zweige, die mit dem p -ten Knotenpunkt verbunden sind. Damit lautet Gl. (44a) für Elemente in der Hauptdiagonale

$$\tilde{\tilde{y}}_{pq}^+ = -\bar{Y}_{pq} = -Y_{pq} - \frac{Y_{p,k-1} Y_{k-1,q}}{\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq k-1}}^k Y_{k-1,\alpha}} \quad (p \neq q) \quad (45a)$$

und für Elemente außerhalb der Hauptdiagonale

$$\tilde{\tilde{y}}_{pp}^+ = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq p}}^k \bar{Y}_{p,\alpha} - \frac{Y_{p,k-1}}{\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq k-1}}^k Y_{k-1,\alpha}}. \quad (45b)$$

Multiplizieren wir Gl. (45a) mit -1 , so erkennen wir, daß nach erfolgter Elimination des Knotenpunkts $k-1$ die neue Admittanz Y_{pq} aus der ursprünglichen dadurch hervorgeht, daß man sie um die bei der Knotenpunkt auflösung zwischen den Punkten p und q einzuführende Polygonadmittanz hinzuaddiert. Die bei diesem Schritt zwischen den Punkten p und q einzufügende Polygonadmittanz errechnet sich dadurch, daß man die zwischen dem

aufzulösenden Knotenpunkt $k - 1$ einerseits und den Punkten p und q andererseits liegenden Sternadmittanzen multipliziert und durch die zum Punkt $k - 1$ gehörende Sternsummenadmittanz (d. i. die Summe aller mit dem Punkt $k - 1$ verbundenen und bei der Auflösung wegfallenden Admittanzen) dividiert. Diese Größe ist aber mit umgekehrtem Vorzeichen der zweite Term auf der rechten der Gl. (45a).

Nicht so einfach ist die Diskussion des Hauptdiagonalelements. Das Hauptdiagonalelement der p -ten Zeile und Spalte der Knotenpunktsadmittanzmatrix ist ja die Summe aller mit dem p -ten Knotenpunkt verbundenen Admittanzen. Daß dies in Gl. (45b) nach erfolgter Knotenpunktsauflösung wieder der Fall ist, erkennt man zunächst noch nicht. Erst durch eine Umformung entsprechend der folgenden Gleichung

$$\bar{y}_{pp}^+ = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^k Y_{p,n} + \frac{Y_{p,k-1} \sum_{n=1}^{k-1} Y_{k-1,n}}{\sum_{n=1}^k Y_{k-1,n}} - Y_{p,k-1} \quad (45c)$$

erkennt man, daß der zweite Term auf der rechten Seite die Summe aller durch die Stern-Polygonumwandlung hinzukommenden mit dem Knotenpunkt p verbundenen Polygonadmittanzen darstellt. Der dritte Term entspricht der Herausnahme der bei der Polygonumwandlung eliminierten Sternadmittanz zwischen dem p -ten und $(k - 1)$ -ten Knotenpunkt.

Damit ist gezeigt, daß die Teilelimination von Knotenpunktsspannungen einer Knotenpunktsauflösung entsprechend den bekannten Gleichungen [83] für die Umwandlung eines Sterns in ein Polygonnetz entspricht.

6. Die Erzeugung gemischter Matrizen aus System-Impedanz- bzw. System-Admittanzmatrizen

In zahlreichen Aufgaben werden neben den Impedanz- oder Admittanzmatrizen auch sogen. gemischte Matrizen verwendet. In den definierenden Gleichungen solcher Matrizen sind sowohl die unabhängigen als auch die abhängigen Veränderlichen nicht ausschließlich Strom- oder Spannungsgrößen, sondern teils Strom- und teils Spannungsgrößen. Hierdurch sind die Matricelemente z. Teil von der Dimension Impedanz, Admittanz oder dimensionslos. Die gemischten Matrizen sind ebenfalls Systemmatrizen, d. h. die Veränderlichen beziehen sich auf Ströme und Spannungen an Klemmenpaaren. Die Indizierung entspricht auch hier wieder den Nummern der Klemmenpaare.

Geht man z. B. von einer Impedanzmatrix und der sie definierenden Gleichung aus, so kann man eine gemischte Matrix dadurch erzeugen, daß man für diejenigen Klemmenpaare, die für die unabhängige Veränderliche die Spannung sein soll, einen Variablentausch vornimmt. Nehmen wir an, das System hat $n + m$ Klemmenpaare und die zu tauschenden Variablen seien die m letzten, so kann man sich denken, daß die Z -Matrix entsprechend partitioniert ist, so daß man mit

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

nach Gl. (7) eine Beziehung für die gemischten Veränderlichen erhält

$$\begin{pmatrix} Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21} & Z_{12} Z_{22}^{-1} \\ -Z_{22}^{-1} Z_{21} & Z_{22}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Die quadratische Untermatrix links oben ist eine Impedanzmatrix, rechts unten eine Admittanzmatrix. Die übrigen Untermatrizen sind im allgemeinen keine quadratischen Matrizen und dimensionslos. Um die Art der Matrizen anzudeuten, führt man manchmal in Gl. (47) Untermatrizen gemäß der folgenden Gleichung ein

$$\begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Der Fall, daß die dimensionslosen Matrizen \bar{D}_{12} und \bar{D}_{21} ebenfalls quadratisch sind, tritt dann ein, wenn man Kettenmatrizen erzeugen will. Kettenmatrizen sind Matrizen, welche die lineare Abhängigkeit der Ströme und Spannungen einer bestimmten Anzahl von Klemmenpaaren einer Kategorie von Strömen und Spannungen einer gleichen Anzahl der anderen Kategorie von Klemmenpaaren beschreiben.

6.1 Die Erzeugung von Kettenmatrizen aus System-Impedanz- bzw. -Admittanzmatrizen

Eine solche Kettenmatrix K wird gewöhnlich folgendermaßen definiert

$$K \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

A , B , C und D sind quadratische Matrizen. Um durch Variablentausch auf diese Form zu kommen, müssen wir zunächst die Plätze der Vektoren i_1 und i_2 vertauschen. Das entspricht bei Z einer Spaltenvertauschung der Untermatrizen. Wir erhalten dann

$$\begin{pmatrix} Z_{12} & Z_{11} \\ Z_{22} & Z_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Wenden wir nun den Variablentausch auf die Vektoren i_1 und u_2 an, so erhalten wir auf der linken Seite die Veränderlichen für die zweite Gruppe von Klemmenpaaren, auf der rechten Seite die Veränderlichen für die erste Gruppe von Klemmenpaaren. Nach Gl. (7) erhalten wir wieder

$$\begin{pmatrix} Z_{12} - Z_{11} Z_{21}^{-1} Z_{22} & Z_{11} Z_{21}^{-1} \\ -Z_{21}^{-1} Z_{22} & Z_{21}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Um auf die Gestalt von Gl. (49) zu kommen, brauchen wir nur noch einmal die Spalten zu vertauschen und, um auf die Veränderliche $-i_2$ zu kommen, die mit i_2 verknüpfte Spalte mit -1 zu multiplizieren. Wir erhalten somit schließlich

$$\begin{pmatrix} Z_{11} Z_{21}^{-1} & Z_{11} Z_{21}^{-1} Z_{22} - Z_{12} \\ Z_{21}^{-1} & Z_{21}^{-1} Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Ein Vergleich mit (49) ergibt

$$A = Z_{11} Z_{21}^{-1}, \quad D = Z_{11} Z_{21}^{-1} Z_{22} - Z_{12}, \quad C = Z_{21}^{-1}, \quad B = Z_{21}^{-1} Z_{22}. \quad (53)$$

Um die Kettenmatrix aus einer entsprechenden Z -Matrix erzeugen zu können, muß 1. diese Z -Matrix existieren, 2. außerdem auch die Inverse von Z_{21} . Aus diesem Umstand muß nicht gefolgert werden, daß die Kettenmatrix nur in diesem Fall existiert, denn man kann eine Kettenmatrix auch aus den entsprechenden Strom- und Spannungsgleichungen direkt erzeugen. In diesem Fall ist es nicht notwendig, daß die erwähnten Matrizen existieren. Es kann z. B. auch sein, daß die Y -Matrix existiert, ohne daß die entsprechende Z -Matrix existiert, und es sei z. B.

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

In einer entsprechenden dualen Vorgehensweise gelangt man ebenfalls zu einer Kettenmatrix, deren Elemente gegeben sind durch die Gleichungen

$$A = -Y_{21}^{-1} Y_{22}, \quad B = -Y_{21}^{-1}, \quad C = Y_{12} - Y_{11} Y_{21}^{-1} Y_{22}, \quad D = -Y_{11} Y_{21}^{-1}. \quad (55)$$

In diesem Fall benötigen wir also die Existenz von Y und Y_{21}^{-1} .

⁷ Vgl. z. B. W. CAUER [12], 2. Aufl., S. 93 ff.

Ein Beispiel dafür, daß die Kettenmatrix existiert, ohne daß eine Y - oder Z -Matrix zu existieren braucht, ist der ideale Übertrager bzw. in der Verallgemeinerung die Übertragermatrix (mit idealen Übertragern). Die Kettenmatrix für die ideale Übertragermatrix (z. B. ideale Mehrphasenübertrager) hat die Form (vgl. [46] Gl. (11))

$$K = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A_{\epsilon}^{*-1} \end{pmatrix}.$$

A ist eine nichtsinguläre Matrix, die im Falle eines einfachen (d. h. nicht matrizenartig aufgebauten) Systems von Übertragern in eine Diagonalmatrix übergeht.

Zusammenfassung

Die beiden Grundaufgaben Teilelimination und Variablentauch ermöglichen es, aus den grundlegenden Matrizen Maschenimpedanzmatrix, Knotenpunkts- und Schnittmengen-Admittanzmatrix, Systemmatrizen für besondere Klemmenpaare zu ermitteln. Solche Matrizen, die Impedanz-, Admittanzmatrizen oder auch gemischte Matrizen sein können, werden in Netzuntersuchungen der Energieübertragungstechnik (statische und dynamische Stabilität, Verlustkoeffizientenberechnung) häufig benötigt. Sie wurden früher in langwierigen Messungen auf dem Netzmodell ermittelt und können aufgrund der angegebenen Verfahren nun auch digital berechnet werden. Die Reduktion einer Knotenpunkts-Admittanzmatrix kann als Elimination von Knotenpunkten gedeutet werden.

Literatur

([1]—[82] siehe AGNI, ISNE und TAVNI)

- [83] KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 6. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959.
- [84] BAUER, H.: Optimaler Verbundbetrieb. Arch. f. Elektrotechn. 42 (1955) S. 13—25.
- [85] BAUER, H., u. H. EDELMANN: Der Sielomat, ein Hilfsmittel des Lastverteilers für optimalen Kraftwerkeinsatz. Elektrizitätswirtsch. 57 (1958) S. 173—180, 301—307, 389—392.
- [86] EDELMANN, H.: Verlustformel für ein Verbundnetz und Ausmessung der Verlustkoeffizienten. ETZ-A 79 (1958) S. 561—567.
- [87] KIRCHMAYER, L. K.: Economic Operation of Power Systems. New York: J. Wiley and Sons 1958.
- [88] EDELMANN, H.: Die statische Stabilität von Schenkelpolmaschinen im Verbundbetrieb. Arch. f. Elektrotechn. 43 (1957) S. 289—303.
- [89] BAUER, F. L., u. R. BAUMANN: Mathematische Behandlung von Netzwerkaufgaben mit Hilfe elektronischer Ziffernrechenanlagen. Elektrizitätswirtsch. 56 (1958) S. 181—187.
- [90] BAUMANN, R.: Automatisierte digitale Netzberechnung. Elektron. Rechenanlagen 2. (1960) S. 75—84.
- [91] NESS, J. E. v.: Iteration Methods for Digital Load Flow Studies. Trans. AIEE pt. III, 78 (1959) S. 583 to 588.
- [92] HALE, H. W., u. R. W. GOODRICH: Digital Computation of Power Flow—Some New Aspects. Trans. AIEE pt. III, 78 (1959) S. 919—924.
- [93] SHIPLEY, R. B., u. DOROTHY COLEMAN: A New Direct Matrix Inversion Method. Trans. AIEE pt. I, 78 (1959) S. 568—572.
- [94] NESS, J. E. VAN: Convergence of Iterative Load-Flow Studies. Trans. AIEE pt. III, 78 (1960) S. 1590 to 1597.
- [95] RINDT, L. J., R. W. LONG u. C. W. KING: Load Flow Using Mesh Analysis Conference Paper AIEE, CP-60-1393. (Power Industry Computer Application Conference, St. Louis, Mo., Nov. 9—11, 1960.)
- [96] REED, M. B., GEORGIA B. REED, J. L. MCKINLEY, H. K. POLD, R. V. HUGO u. W. J. MARTIN: A Digital Approach to Power System Engineering. Part I: Trans. AIEE, Paper No. 60—1214; Part II: Trans. AIEE, Paper No. 60—1215; Part III: Trans. AIEE, Paper No. 61—52.
- [97] EDELMANN, H.: Transformatoren und andere Vierpole in der Netzberechnung mit Inzidenzmatrizen. Arch. f. Elektrotechnik 45 (1960) S. 479—500. (Im Text mit TAVNI bezeichnet.)
- [98] RUTISHAUSER, H.: Zur Matrizeninversion nach Gauss-Jordan. Z. f. angew. Math. u. Physik 10 (1959) S. 281—290.

Privatdozent Dr.-Ing. H. EDELMANN, i. Hse. Siemens-Schuckertwerke AG

Abgeschlossen am 30. Oktober 1961.



Automat und Mensch

Über menschliche und maschinelle Intelligenz

Von Dr.-Ing. **KARL STEINBUCH**,

o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Mit 92 Abbildungen. VIII, 253 Seiten 8°. 1961. Flexibler Kunststoffeinband DM 28,50

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbetrachtungen · Rationalisierung des Geistigen · Signal und Nachricht · Informationstheorie · Logische Verknüpfungen und Zuordner · Signale in Raum und Zeit · Sprache · Zeichenerkennung · Speicher · Nachrichtenverarbeitung · Regelung · Lernende Automaten · Bedingte Reflexe, die Lernmatrix · Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch den Menschen · Motive · Intelligenz · Gullivers Experiment · Das ökonomische Prinzip · Spiel ohne Plan · Automat und Mensch · Literatur- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Die Fähigkeiten moderner Automaten sprengen die Grenze dessen, was früher für „mechanische Gebilde“ als möglich erachtet wurde. Ihre Eigenschaften umfassen Kategorien, die bisher den Menschen vorbehalten waren, z. B. logische Verknüpfung, Zeichenerkennung, Gedächtnis, Lernen.

Unsere Einsicht in die Funktion unseres Denksystems ist gering. Wenn Automaten künstlich Intelligenz erzeugen können, erschließt sich dem forschenden Geist ein Weg zum Verständnis des Menschen: Nämlich über das Verständnis der Automaten.

Das Buch erklärt die Grundbegriffe, die zum Verständnis moderner Automaten erforderlich sind. Technische Erläuterungen in leicht verständlicher Darstellung veranschaulichen durch Bilder des Wesentlichen. Es bringt Überlegungen, wie man mit den Erkenntnissen an Automaten geistige Vorgänge erklären könnte.

Das Buch wendet sich an Unvoreingenommene, gleichermaßen an Techniker, Physiker, Mathematiker, ebenso auch an Geisteswissenschaftler und Biologen, im besonderen auch an die wissenschaftlich interessierte Jugend.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



Soeben erschien:

Betrieb von Elektrizitätswerken

Von Dr.-Ing. **HEINRICH FREIBERGER,**

vorm. Vorstandsmitglied der Hamburgischen Electricitätswerke und Vorsitzender der Vereinigung
Deutscher Elektrizitätswerke (VDEW)

Mit 56 Abbildungen. VIII, 490 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 57,—

INHALTSÜBERSICHT

Tradition und Dynamik der Elektrizitätswirtschaft: Begriffe und Festlegungen. Rechtsgrundlagen. Eigentumsverhältnisse. Wirtschaftliche Vorbelastung der Elektrizitätswerke. Verhältnis der öffentlichen Elektrizitätswerke zu anderen Wirtschaftszweigen. Bedeutung der Verbandstätigkeit. Elektrizitätswirtschaft in Expansion. Wandel der Beziehungen zur Öffentlichkeit · Organisation: Historische Entwicklung. Übliche Organisationsform. Grundsätze optimaler Organisation · Betrieb: Stromerzeugung. Strombezug. Verteilung. Lastverteilung und Netzbefehlsstellen als Zentren der Betriebsüberwachung. Materialwesen. Erhaltung der Betriebsdynamik · Vertrieb: Eigenarten der Vertriebsaufgabe bei E-Werken. Preise und Tarife. Elektrizitätswerbung und -beratung. Betreuung der Kundenanlagen. Messung des gelieferten Stromes und seine Bezahlung. Bedarfsprognose · Planung und Bau: Bauplanung. Baudurchführung · Betriebsführung: Geschäftsführung. Allgemeine Verwaltung. Personalplanung. Der Mensch im Betrieb. Wirtschaftlichkeits-Überwachung. Finanzpolitik. Rechtliche Sicherung · Elektrizitäts- und Energiewirtschaft: Energierohstoffe. Umstellung auf Atomtechnik. Einflußnahme der öffentlichen Hand. Stromversorgung als Dienst an der Allgemeinheit · Bücher und nichtperiodisch veröffentlichte Schriften · Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Das Buch will Leitern von Elektrizitätswerken und deren Mitarbeitern das Rüstzeug geben, über ihren speziellen Arbeitsbereich hinaus die für eine Anpassung des Betriebes an die dynamische Entwicklung nützlichen Erfahrungen zu gewinnen. Es ist somit in der Hauptsache auf Breitenwirkung angelegt. Die Vorausschau auf künftige Entwicklungen erfährt eingehende Behandlung und stellt mit den anderen Daten auch für der Energieversorgung Fernerstehende ein Hilfsmittel zur Verfügung, das die Notwendigkeiten und Möglichkeiten beim Betrieb und bei der künftigen Gestaltung von E-Werken erkennen läßt.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG